LOS VECTORES EN GEOMETRÍA PLANA Y EN GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Por

JULIO GARCÍA PRADILLO

II

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

Definiciones:

En un espacio vectorial cualquiera, varios vectores, v_1, v_2, ..., v_n, se llaman *independientes* cuando cualquier combinación lineal de ellos, de coeficientes no todos nulos, es distinta del vector nulo, es decir,

$$r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \dots + r_n\vec{v}_n \neq o$$

siempre que r_1, r_2, ..., r_n no sean todos nulos.

Se llama *base* de un espacio vectorial a todo conjunto de vectores independientes tal que cualquier vector del espacio vectorial pueda expresarse como combinación lineal de los vectores de la base.

En particular, en el espacio vectorial euclídeo:

«Dos o más vectores libres se llaman *colineales* cuando tienen la misma dirección.»

«Dos o más vectores se llaman coplanarios cuando todos sus representantes pertenecen a un sistema de planos paralelos.»

Se verifican las siguientes propiedades:

1.ª *Cualquier vector libre* no nulo *es una base del espacio vectorial de una recta euclídea.*

En efecto, si es $\vec{v}_1$ un vector determinado no nulo de esa recta, cualquier otro vector $\vec{v}$, al tener la misma dirección que $\vec{v}_1$, puede expresarse como producto de un cierto número real k por $\vec{v}_1$. Ese número k

es precisamente $\dfrac{+ |\vec{v}|}{|\vec{v}_1|}$, segun que $\vec{v}$ y $\vec{v}_1$ sean del mismo sentido o de sentidos opuestos, y O si $\vec{v}$ es el vector nulo.

2.ª *Cualquier par de vectores libres no nulos y no colineales del espacio vectorial de un plano euclídeo constituye una base de ese espacio.*

Si son $\vec{v}$ y $\vec{v}_1$ dos vectores de las condiciones citadas, y $\vec{v}$ otro vector cualquiera del plano, consideremos sus respectivos representantes por un punto O del plano. Sean OV_2, OV_1 y OV. Por V tracemos sendas paralelas a las rectas OV_1 y OV_2 (si V no pertenece a ninguna de las dos). Queda determinado el paralelogramo VV'OV'' que nos demuestra que

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OV'} + \overrightarrow{OV''}$$

pero por la propiedad anterior será $\overrightarrow{OV'} = k_1\vec{v}_1$ y $\overrightarrow{OV''} = k_2\vec{v}_2$, siendo k_1 y k_2 dos números reales, y

$$\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2$$

Si V pertenece a una de las rectas OV_1 o OV_1, $\vec{v}$ puede expresarse mediante $\vec{v}_1$ o $\vec{v}_2$, según vimos, y entonces la propiedad sigue siendo cierta aunque uno de los dos coeficientes es O.

La descomposición es única, pues si fuera $\vec{v} = k'_1\vec{v}_1 + k'_2\vec{v}_2$ se tendría

$$(k_1 - k'_1)\vec{v}_1 = (k'_2 - k_2)\vec{v}_2$$

sólo posible si $k'_1 = k_1$ y $k'_2 = k_2$.

3.ª *Cualquier terna de vectores libres no nulos y no coplanarios del espacio vectorial euclídeo constituye una base de ese espacio.*

La demostración es análoga, y también en este caso cada vector puede expresarse de manera única como combinación lineal de los tres vectores dados.

Si V está en alguno de los planos OV_1V_2, OV_2V_3 o OV_3V_1, por la propiedad anterior v podrá expresarse respectivamente como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ o $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_1$, y en cualquiera de los tres casos, por tanto, como combinación lineal de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ con uno al menos de los coeficientes nulos.

Si V no está en dichos planos, consideremos el paralelepípedo que tiene de diagonal OV y sus aristas de las direcciones de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$. (Ver figura.) Por ser $OV'_1V'''V'_2$ y $V_3VV'''O$ paralelogramos

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OV'''} + \overrightarrow{OV'_3} = \overrightarrow{OV'_1} + \overrightarrow{OV'_2} + \overrightarrow{OV'_3}$$

y por la propiedad primera será

$$\overrightarrow{OV'_1} = k_1\overrightarrow{OV_1},\ \overrightarrow{OV'_2} = k_2\overrightarrow{OV_2},\ \overrightarrow{OV'_3} = k_3\overrightarrow{OV_3}$$

y

$$\vec{v} = k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2} + k_3\vec{v_3}$$

Como en el caso del plano, también esta descomposición de v es única, pues si fuera también

$$\vec{v} = k'_1\vec{v_1} + k'_2\vec{v_2} + k'_3\vec{v_3}$$

sería

$$(k_1 - k'_1)\vec{v_1} = (k'_2 - k_2)\vec{v_2} + (k'_3 - k_3)\vec{v_3}$$

sólo posible si v_1, v_2, v_3 fueran coplanarios, contra la hipótesis, o si ambos miembros son iguales al vector nulo, es decir,

$$k'_1 = k_1 \quad , \quad k'_2 = k_2 \quad , \quad k'_3 = k_3$$

Componentes y coordenadas de un vector respecto a una base

Dado un vector $\vec{v}$, los tres únicos vectores $k_1\vec{v_1}$, $k_2\vec{v_2}$, $k_3\vec{v_3}$ de direcciones $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$, o eventualmente nulos, tales que su suma es igual a $\vec{v}$, se llaman *componentes* del vector $\vec{v}$ respecto a la base $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$.

Los tres números k_1, k_2, k_3 tales que $\vec{v} = k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2} + k_3\vec{v_3}$ se llaman *coordenadas del vector* $\vec{v}$ respecto a la base $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$.

Análogamente, en un plano se tienen para cada vector un par de componentes y un par de coordenadas, respecto a una base v_1, v_2. Y en una recta cada vector tiene una componente y una coordenada respecto a una base $\vec{v_1}$.

Propiedades de las coordenadas de los vectores respecto a una base determinada

Las coordenadas respecto a una cierta base de los vectores del espacio, de un plano o de una recta gozan de las siguientes propiedades:

1.ª *Para cada vector las coordenadas son únicas.*

2.ª *El vector nulo tiene sus coordenadas (o coordenada) nulas.*

3.ª *Las coordenadas de un cierto vector* $r \cdot \vec{v}$ *son las del vector* $\vec{v}$, *multiplicadas por el número* r.

En efecto, si

$$\vec{v} = k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2} + k_3\vec{v_3}$$

$r \cdot \vec{v} = r(k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2} + k_3\vec{v_3})$, pero este segundo miembro, por la propiedad distributiva y la propiedad asociativa del producto de un vector por un número real es igual a $(rk_2)\vec{v_1} + (rk_2)\vec{v_2} + (rk_3)\vec{v_3}$, lo que demuestra la propiedad.

En particular, los *vectores opuestos tienen sus coordenadas respectivamente opuestas.*

4.ª *Las coordenadas de un vector suma de otros varios son sumas de las respectivas coordenadas de los sumandos.*

En efecto, si

$$\vec{a} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3} \quad \text{y} \quad \vec{b} = b_1\vec{v_1} + b_2\vec{v_2} + b_3\vec{v_3}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3}) + (b_1\vec{v_1} + b_2\vec{v_2} + b_3\vec{v_3}) =$$
$$= (a_1 + b_1)\vec{v_1} + (a_2 + b_2)\vec{v_2} + (a_3 + b_3)\vec{v_3}$$

como consecuencia de las propiedades disociativa, conmutativa y asociativa de la suma de vectores y de la propiedad distributiva del producto de un vector por un número real.

Coordenadas ortogonales, normales y ortonormales

Cuando la base que sirve de referencia a los vectores está constituida por vectores perpendiculares dos a dos, las coordenadas se llaman *ortogonales* o *rectangulares.*

Cuando la base está constituida por vectores del mismo módulo, las coordenadas se llaman *normales.*

Y cuando la base está constituida por vectores perpendiculares dos a dos, y, además, del mismo módulo, las coordenadas se llaman *ortonormales.*

Relación entre las coordenadas ortonormales de un vector y la medida de su módulo

Consideremos una base ortonormal $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$. Siendo a un vector cualquiera no nulo, sea $\vec{\alpha}$ un vector de la misma dirección y sentido que $\vec{a}$, y con el mismo módulo que $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$, de modo que será $\vec{a} = a \cdot \vec{\alpha}$, siendo a un cierto número positivo.

Consideremos por un punto O los representantes de los vectores de la base y de $\vec{a}$ y sus componentes. Por ser la base ortonormal, la recta UU'$_1$ es perpendicular a OU'$_1$, por lo que, según la definición de coseno de un ángulo, tenemos:

$$\cos \mathrm{U'_1OU} = \frac{a_1}{a} \quad , \quad \cos \mathrm{U'_2OU} = \frac{a_2}{a} \quad , \quad \cos \mathrm{U'_3OU} = \frac{a_3}{a}$$

siendo a_1, a_2, a_3 las coordenadas de $\vec{a}$.

Teniendo en cuenta que:

«Se llama *ángulo de dos vectores libres no nulos* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$, y se designa por $(\vec{a}, \vec{b})$ el ángulo formado por dos semirrectas del mismo origen, y que tengan respectivamente los mismos sentidos que $\vec{a}$ y $\vec{b}$.»

Resulta que:

$$a_i = a \cdot \cos\,(\vec{u}_i, \vec{a}) \qquad (i = 1,\ 2 \text{ ó } 3)$$

Es decir:

«Cada coordenada de un vector, respecto a una base ortonormal, es igual a la medida de su módulo por el coseno del ángulo que forman el vector correspondiente de la base y el vector dado.»

Vemos, pues, que en el caso de las coordenadas ortonormales, cada coordenada depende del vector dado y de uno de los vectores de la base.

De ahora en adelante designaremos por $x_{\substack{\vec{a}\\ \vec{b}}}$, la coordenada correspondiente a $\vec{b}$ del vector a referido a una base ortonormal de las que b forma parte.

De acuerdo con lo anterior:

$$x_{\substack{\vec{a}\\ \vec{b}}} = a \cdot \cos\,(b, a)$$

Cosenos directores de un vector respecto a una base

Se llaman *cosenos directores* de un vector $\vec{a}$ respecto a una base ortonormal $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, los cosenos de los ángulos de los vectores de la base con el vector $\vec{a}$.

Si se llama *vector unitario* o *versor* correspondiente a un vector a otro vector de la misma dirección y sentido y cuyo módulo es igual que el de cada vector de la base, resulta que:

«Las coordenadas ortonormales de un vector unitario son sus cosenos directores»; y que

«Los cosenos directores de un vector son las coordenadas de su versor.»

Coordenadas cartesianas de puntos

Consideremos en el espacio un punto fijo O y una terna de vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ que constituyan una base. A cada punto P del espacio hagamos corresponder el vector $\overrightarrow{OP}$ (que suele llamarse su vector de posición), y en consecuencia las coordenadas x_1, x_2, x_3 del vector $\overrightarrow{OP}$, respecto a la base dada.

Recíprocamente a cada terna x_1, x_2, x_3 de numeros reales hagamos corresponder el vector $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$, y, en consecuencia, el punto P, extremo del vector fijo de origen, representante de $\vec{v}$.

Por ello se define:

«*Coordenadas cartesianas* de un punto P respecto a un punto fijo O Á a una terna de vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ no coplanarios son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto a la base $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.»

Análogamente, si definen en un plano las coordenadas respecto a un punto fijo O, y dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ no colineales.

Y en una recta, la coordenada, que suele llamarse abscisa, respecto a un punto fijo O y un vector v_1.

Espacio vectorial de los números complejos

Es fácil ver que el conjunto de los *números complejos* respecto a las operaciones de adición y multiplicación por un número real constituye también un *espacio vectorial,* y precisamente *isomorfo* con el *espacio vectorial* constituido por los vectores libres de un plano respecto a las operaciones de adición y multiplicación poi un número real.

Aplicación de las propiedades de una base a la demostración de un teorema de geometría del espacio

«*Por un punto exterior a un plano pasa otro paralelo a él.*»

En efecto, si es O′ el punto y α el plano, por un punto O de éste consideremos los vectores fijos OV_1 y OV_2 representantes de cierta base $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.

Por el punto O′ pasan sendos V.F. equipolentes a OV_1 y OV_2. Sean $O'V'_1$ y $O'V'_2$. Estos dos vectores determinan el plano $O'V'_1V'_2$ que hemos de ver que es paralelo a α. Efectivamente, cualquier punto V′ de este plano es extremo de un vector fijo de origen O′, y podremos escribir

$$\overrightarrow{O'V'} = k_1\overrightarrow{O'V'_1} + k_2\overrightarrow{O'V'_2} = k_1\overrightarrow{OV_1} + k_2\overrightarrow{OV_2}$$

puesto que siendo $\overrightarrow{O'V'}$ y $\overrightarrow{O'V'}$ de distinta dirección constituyen una base de ese plano.

En consecuencia, O′V′ es equipolente a un vector del plano α, y, por tanto, la recta OV es paralela a una recta de dicho plano, y no estando contenida en él, por ser el punto O′ exterior, es paralela al plano. Luego ningún punto del plano $O'V'_1V'_2$ está en el plano α, por lo cual los dos planos son paralelos.

Multiplicación escalar de vectores libres: definición

1) «Se llama *producto escalar* de dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, respecto a una cierta unidad de longitud, al producto de las medidas respecto a esa unidad de los módulos de dichos vectores, por el coseno del ángulo que forman.»

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{o}$ si $\vec{a} = \vec{o}$ o $\vec{b} = \vec{o}$.

Si suponemos que $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ son sendos vectores unitarios de las direcciones y sentidos respectivos de a y b y que

$$\vec{a} = a \cdot \vec{\alpha} \qquad \text{y} \qquad \vec{b} = b \cdot \vec{\beta}$$

podemos escribir designando por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ el producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son nulos. (En realidad, la notación empleada para el producto escalar debería hacer referencia a la unidad de longitud empleada, pero por brevedad la omitimos.)

Propiedades.

1.ª *El producto escalar de dos vectores no nulos es igual a la medida del módulo del primero, por la coordenada ortonormal del segundo respecto al vector del primero.*

Consideremos por un punto O los representantes OA y OB de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y sea B′ la proyección ortogonal de B sobre la recta OA.

Por la definición de coseno, el coseno de $(\vec{a}, \vec{b})$ o, lo que es lo mismo, de $(\vec{\alpha}, \vec{b})$ es igual a la medida algebraica de OB′ (es decir, $\overrightarrow{OB'} : \alpha$) partida por la medida absoluta de OB (que es b). Ahora bien, la medida algebraica de OB′ es lo que llamamos coordenada ortonormal de $\vec{b}$ respecto a $\vec{\alpha}$; luego

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x^{\vec{b}}_{\vec{\alpha}}}{b} \;;\; b \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = x^{\vec{b}}_{\vec{\alpha}}$$

y, por tanto,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot x^{\vec{b}}_{\vec{\alpha}} \qquad c.q.d.$$

2.ª *Anulación del producto.*

Si $\vec{a} \perp \vec{b}$ el producto $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{o}$, ya que $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Si $\vec{a} = \vec{o}$ o $\vec{b} = \vec{o}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ por ser a o b igual a cero.

En cualquier otro caso, el producto escalar es distinto de O, ya que ni a, ni b, ni $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ es cero.

y un menor no nulo de ella del máximo orden posible se obtiene soldando los unos de las cajas K_{11} .. K_{1s_1} con las diagonales principales de todas las cajas restantes. Así, pues, $r_1 = r_1^{(1)} =$ rango $(J - \lambda_1 I) =$ $= n_{11} - 1 + n_{12} - 1 + \ldots + n_{1s_1} - 1 + n_{21} + \ldots + n_{rs_r} = n - s_1 =$ $=$ rango $(A - \lambda_1 I)$. En consecuencia, el número de cajas de J correspondientes a λ_1 es

$$s_1 = s_1^{(1)} = n - \text{rango}\,(A - \lambda_1 I) = \text{corango}\,(A - \lambda_1 I). \qquad (11)$$

Veamos de encontrar el número $s_1^{(2)}$ de cajas de dimensión $\geqslant 2$, entre las K_{lk}, y a este propósito vamos a obtener el rango de $(J - \lambda_1 I)^2$. Para ello basta tener presente que las s_1 primeras cajas de $J - \lambda_1 I$, son matrices nilpotentes cuya elevación al cuadrado supone el desplazamiento de los unos a la inmediata paralela a la derecha de la diagonal principal; las restantes cajas tienen siempre distintos de cero los elementos de sus diagonales principales e igual sucede con sus cuadrados, en los que son nulos todos los elementos situados a la izquierda de las respectivas diagonales principales, como se comprueba inmediatamente. El máximo orden del cual hay algún menor no nulo en $(J - \lambda_1 I)^2$, que puede construirse de modo análogo que en $J - \lambda_1 I$, se obtendrá entonces restando de $r_1^{(1)}$ el número $s_1^{(2)}$ de cajas de orden mayor o igual a 2, que hay entre las s_1 primeras. Obtenemos así

$$r_1 = \text{rango}\,(J - \lambda_1 I)^2 = \text{rango}\,(A - \lambda_1 I)^2 = r_1^{(1)} - s_1^{(2)},$$

de donde

$$s_1^{(2)} = r_1^{(1)} - \text{rango}\,(A - \lambda_1 I)^2 = r_1^{(1)} - r_1^{(2)}. \qquad (12)$$

El razonamiento anterior puede reiterarse por inducción sin dificultad, obteniéndose que, en general, el número de cajas correspondientes al autovalor λ_1, de tamaño $\geqslant l$ será

$$s_1^{(l)} = \text{rango}\,(A - \lambda_1 I)^{l-1} - \text{rango}\,(A - \lambda_1 I)^l = r_1^{(l-1)} - r_1^{(l)}. \quad (13)$$

Necesariamente, al llegar a lo sumo a la potencia de $J - \lambda_1 I$ igual a la multiplicidad del autovalor λ_1, será

$$(J - \lambda_1 I)^{m_1} = \left(\begin{array}{c|c} O & \\ \hline & J' \end{array}\right),$$

donde la matriz J' no posee ningún elemento nulo en su diagonal principal. Por consiguiente,

$$0 \leqslant s_1^{(m_1)} = r_1^{(m_1 - 1)} - r_1^{(m_1)} \leqslant 1, \text{ y } s_1^{(m_1+1)} = s_1^{(m_1+2)} = \ldots = 0. \qquad (14)$$

En definitiva, hemos obtenido así el siguiente resultado:

Teorema.—Para conocer el número y las dimensiones de las cajas de J correspondientes al autovalor λ_1 se calculan los números $n - 1 \geqslant$ rango $(A - \lambda_1 I) \geqslant$ rango $(A - \lambda_1 I)^2 \geqslant \ldots \geqslant$ rango $(A - \lambda_1 I)^{h_1} \geqslant$ $\geqslant 0$, siendo h_1 tal que

$$(A - \lambda_1 I)^{h_1 - 1} \neq O \quad \text{y} \quad (A - \lambda_1 I)^{h_1} = O. \;\; h_1 \leqslant m_1 \qquad (15)$$

3.ª *Propiedad conmutativa* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, puesto que cos $(\vec{a}, \vec{b}) =$ $=$ cos $(\vec{b}, \vec{a})$, o alguno de los factores es el vector nulo.

4.ª *El cuadrado de un vector es igual al cuadrado de la medida de su módulo*, es decir, $\vec{a}^2 = a^2$, ya que cos $(\vec{a}, \vec{a}) = 1$, o $\vec{a}$ es el vector nulo, y ambos miembros son cero.

5.ª $(r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (r \cdot \vec{b})$.

En efecto, si $r = 0$, los tres productos son iguales por ser cada uno de ellos igual a O.

Si $r > 0$ la medida del módulo de $\vec{ra}$ es ra, la de $\vec{rb}$ es rb y, por otra parte, cos $(\vec{ra}, \vec{b})$ = cos $(\vec{a}, \vec{b})$ = cos $(\vec{a}, \vec{rb})$; luego los tres productos son iguales.

Si $r < 0$, la medida del módulo de $\vec{ra}$ es $-ra$, la del módulo de $\vec{rb}$ pero este signo menos es compensado porque

$$\cos(\vec{ra}, \vec{b}) = \cos(\pi - \vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{a}, \vec{rb}) = -\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Si a o b fueran el vector nulo, los razonamientos anteriores no servirían, pero los tres productos son también iguales por ser cada uno de ellos igual a O, de acuerdo con la definición.

6.ª *Propiedad distributiva* $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

La propiedad es inmediata si uno o varios de los tres vectores son el vector nulo. Consideremos, pues, el caso en que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son no nulos.

Si $\vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$, los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son opuestos, y por la propiedad quinta los productos $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y $\vec{a} \cdot \vec{c}$ son números opuestos y, por tanto, su suma es cero. Como el primer miembro es también cero, los dos productos son iguales.

Si $\vec{b} + \vec{c} \neq o$ por la propiedad primera:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = a \cdot x_{\vec{\alpha}}^{\vec{b} + \vec{c}}$$

pero como una cierta coordenada de un vector suma de otros dos es igual a la suma de las respectivas coordenadas de los sumandos

$$x_{\vec{\alpha}}^{\vec{b} + \vec{c}} = x_{\vec{\alpha}}^{\vec{b}} + x_{\vec{\alpha}}^{\vec{c}}$$

y

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = a\left(x_{\vec{\alpha}}^{\vec{b}} + x_{\vec{\alpha}}^{\vec{c}}\right) = a \cdot x_{\vec{\alpha}}^{\vec{b}} + a \cdot x_{\vec{\alpha}}^{\vec{c}} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Como consecuencia,

$$\left(\sum_i \vec{a}_i\right) \cdot \left(\sum_j \vec{b}_j\right) = \sum_{i,j} \left(\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j\right)$$

y en particular

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

7.ª Si son (a_1, a_2, a_3) las coordenadas ortonormales de $\vec{a}$, y (b_1, b_2, b_3) las de $\vec{b}$ respecto a una base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Se deduce fácilmente por la propiedad distributiva y algunas de las otras propiedades.

Análogamente sucede cuando los vectores de un plano están referidos a una base ortonormal u_1, u_2, pero naturalmente en ese caso sólo aparecen dos pares de coordenadas.

Algunas aplicaciones de las propiedades de la multiplicación escalar de vectores

Ecuación de una recta de un plano.

Consideremos en el plano un punto fijo O y dos vectores unitarios, $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, de direcciones perpendiculares, y consideremos respecto a estos elementos coordenadas cartesianas.

Tratemos de hallar la ecuación a la que satisfacen los puntos de la recta r que pasa por el punto P_1 de coordenadas (x_1, y_1), y es perpendicular al vector n de coordenadas (α, β). La condición necesaria y suficiente para que cierto punto P (x, y) pertenezca a la recta r es que

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{n} = O$$

o utilizando coordenadas

$$(x - x_1) \cdot \alpha + (y - y)\beta = O$$

Mediante utilización de otras propiedades de los vectores puede obtenerse fácilmente la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene la dirección del vector d (δ_1, δ_2).

La condición necesaria y suficiente para que un punto $P(x, y)$ pertenezca a la recta es que

$$\overrightarrow{P_1P} = k \cdot \vec{d}$$

siendo k un número real cualquiera. Utilizando las coordenadas tenemos:

$$x - x_1 = k \cdot \delta_1$$
$$y - y_1 = k \cdot \delta_2$$

Si $\delta_1 = O$, la ecuación de la recta es $x - x_1 = O$.
Si $\delta_2 = O$, la ecuación es $y - y_1 = O$.
Si δ_1 y δ_2 son distintas de cero, eliminando k tenemos:

$$\frac{x - x_1}{\delta_1} = \frac{y - y_1}{\delta_2}.$$

Teorema del coseno. Consideremos un triángulo cualquiera ABC. Si es

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} \quad , \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} \quad \text{y} \quad \vec{c} = \overrightarrow{AB}$$

$$-\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

y, por tanto,

$$(-\vec{a})^2 = (\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$$

o sea

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}).$$

Ahora bien,

$$\widehat{\vec{b}, \vec{c}} = \pi - A \quad \text{y} \quad \cos(b, c) = -\cos A;$$

luego

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cos A.$$

Como caso particular resulta el teorema de Pitágoras, si

$$A = \frac{\pi}{2}.$$

Otra aplicación análoga es la demostración del teorema del cuadrado de la diagonal de un ortoedro

$$d^2 = \vec{d}^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Teoremas de adición de las funciones trigonométricas seno y coseno

En un plano consideremos un par de vectores, i, j, que formen un ángulo de $+ \pi/2$ radianes.

Sean OI y OJ sus representantes de origen O. Si giramos estos dos vectores fijos un ángulo cualquiera α alrededor de O, obtendremos otros dos V.F., OI′ y OJ′, representantes de dos V.L., $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, que constituyen otra base.

Sea OU el representante de un vector unitario $\vec{u}$ que forma con $\vec{i}'$ un ángulo β.

Se verifica:

$$\vec{u} = \cos\beta \cdot \vec{i'} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot j'$$

o sea

$$\vec{u} = \cos\beta \cdot \vec{i'} + \operatorname{sen}\beta \cdot \vec{j'} \qquad \text{(A)}$$

Si multiplicamos escalarmente por $\vec{i}$ los dos miembros de la igualdad (A), tenemos:

$$(\vec{i} \cdot \vec{u}) = \cos\beta \cdot (\vec{i} \cdot \vec{i'}) + \operatorname{sen}\beta \cdot (\vec{i} \cdot \vec{j'})$$

pero

$$(\vec{i}, \vec{u}) = \alpha + \beta \quad , \quad (\vec{i}, \vec{i'}) = \alpha \quad , \quad (\vec{i}, \vec{j'}) =$$

$$= \alpha + \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha$$

luego

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Análogamente, multiplicando los dos miembros de (A) escalarmente por j

$$(\vec{j} \cdot \vec{u}) = \cos\beta \cdot (\vec{j} \cdot \vec{i'}) + \operatorname{sen}\beta \cdot (\vec{j} \cdot \vec{j'})$$

pero

$$(\vec{j}, \vec{u}) = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2} \quad , \quad (\vec{j}, \vec{i'}) = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad , \quad (\vec{j}, \vec{j'}) = \alpha$$

luego

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$$

Teorema de las mediatrices de un triángulo

«En un triángulo cualquiera las mediatrices concurren en un punto.»

Consideremos el triángulo ABC y sea O el punto en que necesariamente han de cortarse las mediatrices de los lados BC y CA, por ser perpendiculares a rectas que se cortan.

Si ponemos

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a} \quad , \quad \overrightarrow{CA} = \vec{b} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = \vec{c} \quad , \quad \overrightarrow{AO} = \vec{x} \quad , \quad \overrightarrow{BO} = \vec{y} \quad , \quad \overrightarrow{CO} = \vec{z}$$

se tiene

$$\vec{a} = \vec{y} - \vec{z} \quad , \quad \overrightarrow{A'O} = \frac{\vec{y} - \vec{z}}{2} + \vec{z} = \frac{\vec{y} + \vec{z}}{2}$$

$$\vec{b} = \vec{z} - \vec{x} \quad , \quad \overrightarrow{B'O} = \frac{\vec{z} + \vec{x}}{2}$$

$$\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} \quad , \quad \overrightarrow{C'O} = \frac{\vec{x} + \vec{y}}{2}$$

(A′, B′ y C′ son los puntos medios de los lados.)

Pero como $\overrightarrow{A'O} \perp \vec{a}$ y $\overrightarrow{B'O} \perp \vec{b}$

$$\frac{(\vec{y}+\vec{z})}{2}(\vec{y}-\vec{z}) = O \quad \text{y, por tanto,} \quad \vec{y}^2 - \vec{z}^2 = O$$

$$\frac{(\vec{z}+\vec{x})}{2}(\vec{z}-\vec{x}) = O \quad \text{y, por tanto,} \quad \vec{z}^2 - \vec{x}^2 = O$$

Pero entonces $\vec{x}^2 - \vec{y}^2 = O$ y, por tanto, $\overrightarrow{C'O} \perp \vec{c}$; es decir, la tercera mediatriz también pasa por O c.q.d.

Teorema de las alturas de un triángulo

«En un triángulo cualquiera las rectas que contienen a las alturas concurren en un punto.»

Siendo ahora O el punto en que concurren las rectas que contienen a las alturas correspondientes a los lados BC y CA y con la misma notación que antes tenemos que como

$$\vec{a} \perp \vec{x} \qquad (\vec{y}-\vec{z})\,\vec{x} = O \quad ; \quad \vec{y}_1\,\vec{z} - \vec{z}_1\,\vec{x} = O$$

$$\vec{b} \perp \vec{y} \qquad (\vec{z}-\vec{x})\,\vec{y} = O \quad ; \quad \vec{z}\cdot\vec{y} - \vec{x}\cdot\vec{y} = O$$

Como consecuencia,

$$\vec{z}\cdot\vec{y} - \vec{z}\cdot\vec{x} = (\vec{y}-\vec{x})\cdot\vec{z} = O \qquad \vec{a}\cdot\vec{z} = O$$

y como ninguno de los dos factores es el vector nulo $\vec{a} \perp \vec{z}$; pero entonces la recta CO contiene a la tercera altura y el teorema queda demostrado.

(Unicamente el vector $\vec{z}$ sería nulo si las dos primeras alturas concurrieran en C, pero entonces el triángulo ABC tendría el ángulo C recto, y las tres alturas concurrirán en el mismo punto C.)