SOBRE LA RESOLUCION DEL PROBLEMA DE ERDÖS

Por
JUAN TORRES NOGUERA

En esta nota se da ¿otra solución? del problema de Erdös, cuyo enunciado aparece en la Revista GACETA MATEMATICA, 1.ª serie, tomo XV, números 1 y 2.

Enunciado del problema: «Dado un triángulo $P_1P_2P_3$, sean A_1, A_2, A_3 tres puntos distintos de cada uno de sus lados: Demostrar que el área del triángulo $A_1A_2A_3$ no puede ser menor que las áreas de cada uno de los triángulos $P_1A_2A_3$, $P_2A_1A_3$, $P_3A_1A_2$, y que sólo es igual cuando A_1, A_2, A_3 son los puntos medios de los lados.»

Preferimos, en dicho enunciado, cambiar la expresión «no puede ser menor que las áreas de cada uno» por la expresión equivalente «debe ser mayor o igual que alguna de las áreas».

Nos interesa conocer, en primer lugar, la limitación del área de un triángulo mediante el

LEMA: El área de un triángulo no supera al semiproducto de un lado, que puede ser cualquiera, por la flecha de un arco de circunferencia, cuya cuerda coincide con el lado considerado y que, además, pasa por el tercer vértice. En otros términos: Para el área S de un triángulo se tiene

$$S \lesseqgtr \frac{1}{2} \, c. \, \text{tang.} \frac{A + B}{2}$$

en donde A y B son los ángulos contiguos al lado c. Además, vale el signo $=$ o el signo $<$, según se tenga $A = B$ ó $A \neq B$, respectivamente.

Por otra parte, sin restringir la generalidad de la demostración, podemos suponer que el triángulo $A_1A_2A_3$ es equilátero. En efecto, existe una equivalencia que transforma al triángulo $A_1A_2A_3$ en otro equilátero. Mediante una homotecia se puede completar la suposición haciendo $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_1 = 1$.

Si designamos ahora por T, T_1, T_2, ... las áreas de los triángulos $A_1A_2A_3$,

$P_1A_2A_3$, $A_1P_2A_3$, .. , respectivamente, se presentará uno, y sólo uno, de los casos siguientes :

1.° Caso en que el triángulo $P_1P_2P_3$ no es equilátero. Entonces alguno de sus ángulos, por ejemplo el P_1, verificará la relación $P_1 > 60°$. Luego, en el triángulo $P_1A_2A_3$, se tendrá

$$\frac{A_2 + A_3}{2} = \frac{180° - P_1}{2} < 60°$$

de donde en virtud del lema establecido

$$T_1 < T.$$

2.° Caso en que el triángulo $P_1P_2P_3$ resulta equilátero. Entonces, $P_1 = P_2 = P_3 = 60°$. y los triángulos $P_1A_2A_3$, $A_1P_2A_3$, $A_1A_2P_3$ resultan iguales o congruentes. Luego, en virtud del lema se verifica

$$T_1 = T_2 = T_3 \quad T$$

debiendo tomar el signo superior o el inferior, según que dichos triángulos resulten equiláteros o no, respectivamente.