SOBRE EL CONCEPTO DE ENVOLVENTE

José Bayolo Pacheco de Amorim
De la Universidad de Coimbra

1. Sea

$$f(x, y, a) = 0 \tag{1}$$

la ecuación de una familia, F, de curvas del plano OXY.

Una vez considerada en el espacio OXYA, esta ecuación representa una superficie, S, de que aquellas curvas no son más que la proyección sobre OXY de la familia de sus curvas de nivel.

Fijado un $a = a_0$, se obtiene, en el espacio, una curva de nivel sobre S, que, proyectada sobre OXY, dará una curva $f(x, y, a_0) = 0$ de la familia F.

Llamando *contorno aparente*, C, según OA, al lugar geométrico de los puntos de contacto entre S y su cilindro circunscrito de generatrices paralelas a OA, y *proyección del contorno aparente de S*, o solamente *proyección de S*, o aun *proyección del contorno*, a la proyección, C′, de C, sobre OXY, es evidente que la proyección del contorno aparente se obtendrá eliminando a entre la ecuación (1) y la ecuación

$$f_a'(x, y, a) = 0,$$

una vez que, en los puntos de contacto entre S y el cilindro circunscrito, el plano tangente a S deberá ser paralelo a OA.

A esta proyección se suele llamar *envolvente* de la familia de curvas F.

Claro está que, donde el plano de nivel $a = a_0$ corte al contorno C, la curva de F respectiva encontrará C′ en un punto donde le será tangente.

De ahi el llamársele envolvente.

Pero, se deberá esperar antes que, por lo general, eso no ocurra.

Por eso, según la definición corriente, la envolvente de una familia de curvas es, por lo general, solamente envolvente, en realidad, de una pequeña parte de la familia o, hasta mismo, de una sola de sus curvas.

Por lo que preferimos llamar envolvente a la proyección del contorno aparente.

Aclarado así este concepto, vamos ahora a presentar una definición general de envolvente de una familia de variedades en un espacio de n dimensiones.

2. Sean

(2) $$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

donde $p \leqslant n - 1$, las ecuaciones de una variedad $(n - p)$ *, S_{n-p}, en E_n.

Consideremos, en cada uno de los puntos P, de S_{n-p}, el plano $(n - p)$ tangente respectivo, α.

El conjunto, C, de los puntos donde este plano sea paralelo a

$$OX_1, OX_2, \ldots, OX_k \; {}^{**}$$

se dice *contorno aparente* de S_{n-p}, en E_n, *en relación* al espacio E_{n-k} de los $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$.

A su proyección, C′, sobre este espacio E_{n-k}, llamaremos, abreviadamente, *proyección de* S_{n-p} sobre E_{n-k}, o aun contorno aparente de S_{n-p} sobre E_{n-k}.

3. Según estas definiciones, para cada punto del contorno de S_{n-p} en E_n, relativamente a E_{n-k}, tendremos:

(3) $$\begin{cases} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \dfrac{\partial f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

porque, dicho punto, pertenece a S_{n-p} y, en él, su plano tangente es paralelo a OX_j.

4. Para obtener las ecuaciones de la proyección, C′, habrá que eliminar los x_j entre las ecuaciones (3).

Claro está que, ni siempre existirán dichos contornos, visto que ni siempre aquel sistema tendrá soluciones comunes.

Hasta podremos decir que él será, por lo general, incompatible.

Se trata, en el caso general, de un sistema de

$$p + pk = p\,(k + 1)$$

ecuaciones con n variables.

5. Una vez que el plano tangente a S_{n-p}, en un punto M_0 del contorno C, es paralelo, por hipótesis, a $OX_1, OX_2, \ldots, OX_k$, resulta que él será, del mismo modo, tangente a C′ en la proyección P_0 de M_0 sobre E_{n-k}, así como al cilindro circunscrito.

6. Si ahora intersectáramos S_{n-p} por el plano de nivel

$$x_j = \alpha j \; (j = 1, 2, \ldots, k),$$

obtendremos una variedad de nivel S_{n-p-k} de S_{n-p} en E_n.

Dicho plano, al desplazarse paralelamente a sí mismo, determinará sobre S_{n-k} una familia de variedades de nivel relativas a E_{n-k}.

---

* Queremos decir con esta expresión que dicha variedad tiene, de hecho, n—p dimensiones.

** El orden por que se toman los ejes es indiferente, razón por que elegimos los K primeros.

La variedad S_{n-p}, definida por (2) establece así, en caso de que la consideremos en el espacio E_{n-p}, una familia de variedades, F, dependientes de los k parámetros x_1, x_2, ..., x_k, familia que es constituída precisamente por las proyecciones sobre E_{n-k} de las variedades de nivel de S_{n-p} en E_n.

7. Sea ahora S^0_{n-p-k} una variedad de la familia F, determinada por el plano de nivel α_0 pasando por M_0.

El plano tangente, β, a S_{n-p} en M_0, será tangente también a la misma variedad de nivel y, como ya sabemos, a C.

Y, sobre E_{n-k}, serán tangentes β, C′ y S^0_{n-p-k}.

De manera que, a todo punto M_0 del contorno C de S_{n-p}, corresponderá una variedad de nivel, cuya proyección sobre E_{n-k} será una variedad S^0_{n-p-k} (de la familia F) tangente a la proyección C′, de S_{n-p} en E_{n-k}, justamente en el punto, P_0, proyección de M_0.

Cuando se desplace α_0, paralelamente a sí mismo, esto es, al variarse los parámetros x^0_j, la variedad S^0_{n-p-k}, de la familia F, se moverá manteniéndose tangente a la proyección C′ (mientras haya, a lo menos, un punto común a la variedad de nivel y al contorno en E_n).

Por esto, la proyección C′ se llama *envolvente* de la familia F, y cada una de las S^0_{n-p-k} se llama *involuta* *

8. El conjunto de los puntos de tangencia de cada una de estas involutas con la envolvente se llama *característica* de dicha involuta.

Ella será la proyección sobre E_{n-k} del conjunto de los puntos comunes a la variedad de nivel determinada por α_0 en S_{n-p} y al contorno C. **

9. Nada nos dice que todas las involutas tengan su característica ni siquiera reducida a un punto.

Esto es, nada nos dice que cada una de las variedades de F sea tangente en algún punto a la envolvente; siendo, al contrario, de esperar que no lo sean, en el caso general.

Pero lo que se puede garantizar, como hemos visto, es que por cada punto de la envolvente pasará una involuta, y que, en él, serán tangentes una a la otra.

Todo punto de la envolvente será así punto de una característica, y recíprocamente.

De modo que:

10. La envolvente es el lugar geométrico de las características.

11. Dado ahora el contorno C, es de notar que él constituye, a su vez, una variedad. Como tal, tendrá, del mismo modo, sus variedades de nivel y su contorno, C_1, cuya proyección sobre E_{n-k}, C'_1, será la envolvente de la familia que C establece sobre E_{n-k}, esto es, de la familia de las características del contorno C′ de S_{n-p}.

---

* El nombre de envolvente solamente es apropiado mientras la proyección constituya una variedad de, a lo menos, una dimensión.

** O, lo que da lo mismo, la intersección del plano de nivel con el contorno. A esta intersección llamaremos igualmente *característica*, en En.

A este *contorno aparente sobre* E_{n-k} del contorno de la variedad dada, S_{n-p}, llamaremos *primera arista de retroceso* del contorno aparente de dicha variedad S_{n-p}.

La arista de retroceso es así la envolvente de las características. *

El contorno del contorno C tendrá a su vez, un contorno aparente sobre E_{n-k}, que se llama *segunda arista de retroceso* de C. Y así por delante, mientras existan contornos.

12. La doctrina que hemos expuesto conduce inmediatamente al sistema de ecuaciones que nos dan la primera arista de retroceso: no hay más que añadir al sistema (3) las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j\, \partial x_l} \cdot \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, p \\ j, l = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

Añadiendo las terceras derivadas, tendríamos la segunda arista de retroceso y así por delante.

13. *Ejemplo. Familia de superficies dependientes de un parámetro· en el espacio de tres dimensiones* Sea, en el E_4,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

la ecuación de una variedad S_3.

Ella establece una familia de variedades (2) en el espacio E_3 de los x_1, x_2, x_3, y su contorno, C, tendrá por ecuaciones

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ f'_{x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{cases}$$

Se obtendría la ecuación del contorno aparente S_2, eliminando x_4 entre estas dos ecuaciones.

Las características en E_4, se obtienen intersectando el contorno por planos de nivel, de ecuación $x_4 = a$.

Tendrán, por lo tanto, generalmente, $4 - 3 = 1$ dimensión, esto es, serán líneas. Lo mismo se dice de las características en E_3.

Estas constituyen, como hemos dicho, la familia que el contorno C establece sobre E_3.

Su envolvente S_1 (contorno aparente del contorno C), será la primera arista de retroceso de S_2:

$$\begin{cases} f\ (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ f'_{x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ f''_{x_4^2}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{cases}$$

* Dado que la familia que C establece sobre E_{n-k} es justamente la familia de las características de F.