NOTA SOBRE UN PROBLEMA DE ERDÖS

por

E. G.-Rodeja F.

En el «Rendiconti del Seminario Matematico di Padova» [1] se encuentra resuelto un problema propuesto por J. Reinwater [2], cuyo enunciado se atribuye a P. Erdos.

«Dado un triángulo $P_1P_2P_3$, sean A_1, A_2, A_3, tres puntos distintos de cada uno de sus lados. Demostrar que el área del triángulo $A_1A_2A_3$ no puede ser menor que las áreas de cada uno de los triángulos $P_1A_2A_3$, $P_2A_1A_2$, $P_3A_1A_2$ y que sólo es igual cuando A_1, A_2, A_3 son los puntos medios de los lados.»

Damos a continuación una nueva y más breve solución del problema.

Es lícito suponer $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1 = 1$, $(P_1P_2P_3) = 1$, donde $(P_1P_2P_3)$ es el área del triángulo.

Si

$$\lambda = P_1A_3, \quad \mu = P_2A_1, \quad \nu = P_3A_2, \quad T = (A_1A_2A_3),$$

$$X_1 = (P_1A_3A_2), \quad X_2 = (P_2A_1A_3), \quad X_3 = (P_3A_2A_1),$$

$$F = \lambda\mu\nu, \quad G = (1 - \lambda)(1 - \mu)(1 - \nu)$$

se obtiene:

$$X_1 = \lambda(1 - \nu), \quad X_2 = \mu(1 - \lambda), \quad X_3 = \nu(1 - \mu),$$

$$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 = F \cdot G, \quad T = 1 - (X_1 + X_2 + X_3) = F + G.$$

$$T > \frac{1}{4} \Longrightarrow X_1 + X_2 + X_3 < \frac{3}{4} \Longrightarrow \min.(X_1, X_2, X_3) < \frac{1}{4} < T.$$

---

[1] Morgantini, E. Su di un problema di Erdös. Rend. Sem. Univ. Padova 30 (1960), 245-247.

[2] The American Mathematical Monthly. Vol. 67 (1960), pág. 479.

$$T < \frac{1}{4} \Longrightarrow F + G = \frac{\alpha}{4}, \quad \alpha < 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \min. (X_1, X_2, X_3) \leqslant (F \cdot G)^{1/3} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\frac{F + G}{2}\right)^2\right]^{1/3} = \frac{\alpha^{2/3}}{4} < \frac{\alpha}{4} = T.$$

$$T = \frac{1}{4} \Longrightarrow \min. (X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{4}.$$

$$T = \min. (X_1, X_2, X_3) \Longrightarrow T = \min. (X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow T = X_1 = X_2 = X_3 = \frac{1}{4} \Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}.$$

Observatorio de Santiago.