ESTUDIO DE LOS POLIEDROS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Por

ALFONSO MARTÍNEZ DE FRUTOS

Para estudiar los volúmenes y áreas de las secciones de los poliedros, puede observarse de una manera primitiva, que su contorno (hablando de areas) es poligonal y que siempre que la sección no atraviese ningún vértice del poliedro, se tratará de un polígono, variable al variar la sección, cuya ley no puede ser arbitraria.

En el presente estudio hallamos la ley que siguen dichas áreas, con lo cual puede fácilmente resolverse cualquiera de los problemas que a ellos se refiera, unido a lo cual pueden resolverse otros problemas de la Geometría Métrica del espacio de tres dimensiones. Entre estos problemas puede citarse, como muy notable, el de la intersección de dos poliedros cualquiera, determinando rápidamente el sólido común y el mínimo número de secciones de ambos cuerpos a efectuar para la obtención de dicho sólido.

Teoremas tan notables como el del volumen del prismatoide, volumen de la esfera, etc., pueden demostrarse de forma analítica, sumamente elegante, como puede verse en el texto del presente trabajo.

La ley de variación de las áreas de las secciones de los poliedros por un haz de planos paralelos en un espacio de tres dimensiones.

Teorema fundamental.—Si tomamos como variable independiente la distancia de un punto fijo al plano variable de la sección, la función que liga el área de la sección del poliedro con la distancia al punto fijo es un arco de parábola de segundo grado, siempre que entre los planos de las secciones extremas (situadas a la máxima y mínima distancia del punto fijo del espacio) no haya un plano de la familia que contenga un vértice del poliedro.

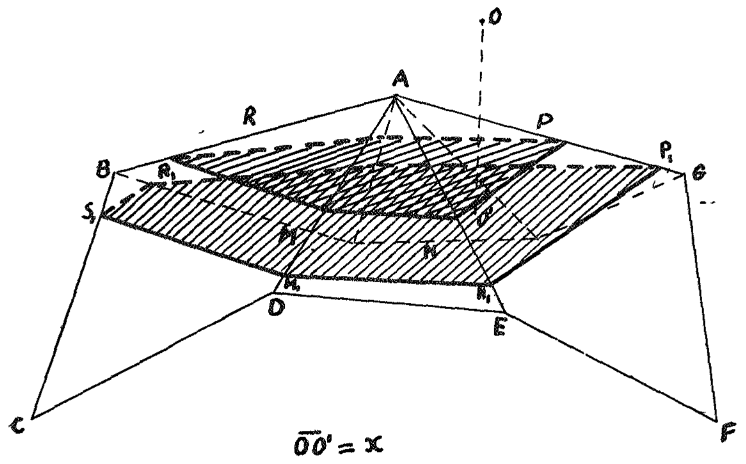

Fig. 1

Figura fundamental para estudiar la ley de variación de las áreas citadas

Sea A B C D E F G H una parte de un poliedro cualquiera y M N P Q R, una sección del mismo por un plano, O punto fijo del espacio y O′ la proyección del mismo sobre el plano de la sección.

El conjunto de planos paralelos forma un haz. Llamaremos un subhaz al conjunto de planos tales que si x_1 y x_2 son las distancias del punto

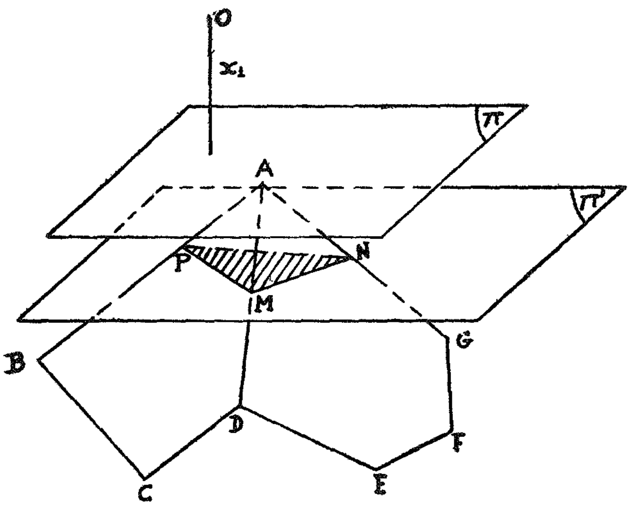

Fig. 2

Caso primero del teorema

O a dos planos del haz que contienen vértices del poliedro, se verifica que toda sección del haz de planos paralelos tal que su distancia, x, al punto O satisfaga la condición $x_1 < x < x_2$, no contiene ningún vértice del poliedro. Teniendo en cuenta esta definición el teorema fundamental de la ley de variación de las áreas de los poliedros regulares puede enunciarse de la manera siguiente:

El área de la sección de un poliedro por un plano cualquiera perteneciente a un cierto sub-haz viene dada por $S = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *donde* S *es el área del poliedro; x la distancia ya indicada y* α, β *y* γ *las constantes que dependen únicamente del poliedro de que se trate y del sub-haz que se considera.*

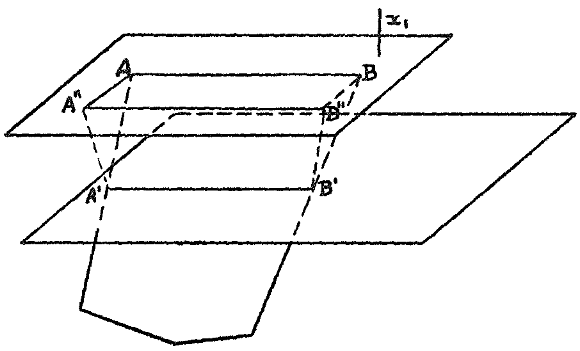

Fig. 3

Caso segundo del teorema

Demostración.—Sea la sección representada en la figura primera. El área S de la misma viene dada por la suma algebraica de las áreas de los triángulos que, teniendo un vértice en el punto O', los otros dos son del polígono cuya área queremos determinar. Así en el caso de la figura anterior tenemos:

$$S = S_{O'NP} + S_{O'PQ} + S_{O'QR} + S_{O'RM} + S_{O'MN}$$

Ahora bien: El área de cada triángulo es el semiproducto de la base por la altura; si probamos que la altura y la base son funciones lineales de x la propiedad quedará probada.

En efecto: Las rectas P N, por ser las secciones del plano A G F E A por un sub-haz de planos paralelos serán paralelas entre sí y el pie, T, de la perpendicular O'T a la recta P N, estará contenido en el plano que pasa por O y es ortogonal a P N, así el lugar del punto T al variar la orientación de planos estará en la intersección de los planos A G F E A, y el perpendicular a la dirección P N, y que pasa por O es una recta coplanaria con la OO' que tomamos como eje x. Por tanto

$$O'T = \alpha_1 x + \beta_1 \quad c.q.d.$$

Ahora nos queda por probar que la distancia N P, es también función lineal de x. Si tomamos como eje x' la proyección de la recta O O, sobre el plano A G F E A, y como eje y' una recta cualquiera perpendicular a la x' es inmediato ver que P N, es la suma de las ordenadas, correspondientes a la misma abscisa x' de las rectas A G y A E, luego

$$PN = \alpha_2 x' + \beta_2.$$

Pero como x' es la proyección de la distancia x sobre el plano A G F E A, si es el ángulo de OO' con ese plano $x' = x \cos \varphi$ luego

$$PN = \alpha_2 x \cos \varphi + \beta_2$$

que también es una función lineal, por tanto:

$$S_{O'NP} = \frac{1}{2} (\alpha_1 x + \beta_1) \cdot (\alpha_2 x \cos \varphi + \beta_2)$$

y lo mismo sucede con los restantes triángulos.

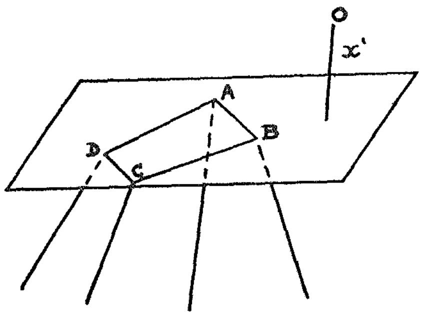

Fig. 4

Caso tercero del teorema

Por tanto

$$S = \Sigma \frac{1}{2} (\alpha_i x + \beta_i)(\alpha_j x + \beta_j) = x^2 \Sigma \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j + $$
$$+ x \Sigma \frac{1}{2} (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) + \Sigma \frac{1}{2} \beta_i \beta_j$$

que es una expresión de la forma:

$$S = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

como pretendíamos probar.

Por otra parte si tomamos un plano de otro sub-haz (el M N P Q R M, por ejemplo) se observa que al determinar la longitud de uno de los lados hemos probado que era función lineal de x de la forma $\alpha_j x + \beta_j$ porque era la suma de las ordenadas, correspondientes a la misma abscisa x' de dos rectas. Al tomar el plano del otro sub-haz la recta AG anterior se convierte en la GF, luego los nuevos coeficientes α_j y β_j no serán los mismos, con lo que se prueba la correspondencia biunívoca entre los sub-haces de planos paralelos y las parábolas de variación de las áreas.

Aplicaciones.—Esta teoría la hemos elaborado al tratar de dar una solución sencilla al problema cuyo enunciado transcribimos a continuación, propuesto en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes.

»Se da un cubo en el cual los vértices A y A′ son opuestos (extremos de una misma diagonal del cuerpo) y sea B C D, el triangulo intersección del triedro trirrectangulo que tiene por aristas las tres del poliedro que pasan por A con un plano perpendicular a A A′; U V W, el triángulo intersección del mismo plano con el triedro análogo al anterior de vértice A′. Si α es el valor del área de la sección del cubo con el citado plano, hallar la distancia x del punto A al plano de la sección para que α sea la medida geométrica entre las areas de los triángulos B C D y U V W.

Como se ve se trata de un problema sobre las secciones de un poliedro regular. Es interesante, por lo tanto, hallar las leyes generales de variación de las áreas de los poliedros regulares, pero antes de estudiar el detalle de los cálculos, vamos a demostrar nuevas propiedades de estas secciones.

Definición.—Llamaremos secciones extremas a planos que tienen un sólo vértice, arista o cara común al cortar el poliedro por ellos, o bien al plano común de dos sub-haces.

Así pues, las secciones extremas absolutas (los planos de los sub-haces que dejan todo el poliedro en un mismo semi-espacio) pueden tener común con el poliedro un vértice solamente, una arista o una cara. El teorema que enunciamos y demostramos a continuación se refiere a esas secciones extremas absolutas.

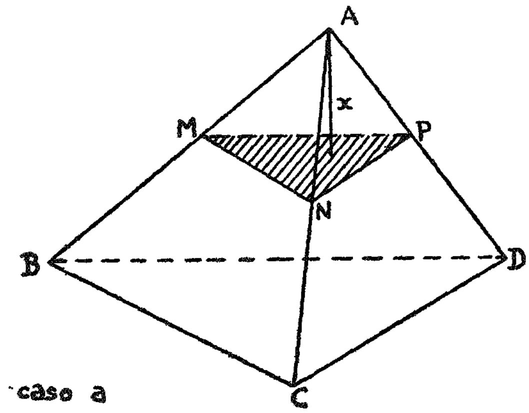

Fig. 5

Teorema.—Si la sección extrema citada en el apartado anterior pasa por un vértice del poliedro, la parábola correspondiente a un subhaz contiguo a dicha sección es tangente al eje x; si contiene a una arista del poliedro, la ordenada de la ley de variación de las áreas correspondiente a un valor de la abscisa igual a la distancia de dicha arista al origen (O) de distancias es nula, pero el arco de parábola no es tangente al eje x; por último si dicha sección extrema tiene común con el poliedro una cara del mismo, la ordenada correspondiente a la distancia de dicha cara al origen (O) de las x es igual al área del mismo polígono.

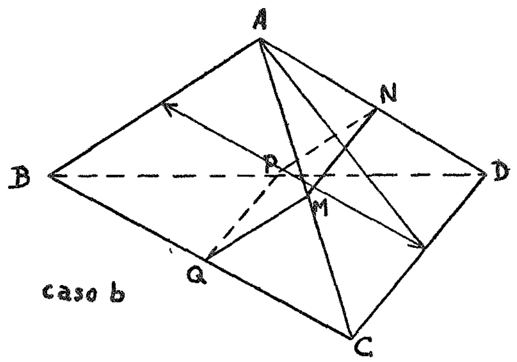

Fig. 6

Demostración.—Este segundo teorema se prueba muy fácilmente de la forma siguiente:

Consideremos el caso primero, que la extrema π contiene solamente el vértice A del poliedro. Observando que dicha sección no es otra cosa que el límite del área del triángulo M N P, cuando

$$x \to x_1$$

se tendrá

$$S(x_1) = \lim_{x \to x_1} S_{MNP} = \lim_{x \to x_1} \frac{1}{2} \overline{MN} \cdot \overline{MP} \operatorname{sen} \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha \lim_{x \to x_1} \overline{MN} \cdot \overline{MP}$$

Ahora bien; al demostrar el teorema fundamental hemos visto que los lados de una sección cualquiera del poliedro son funciones lineales de x. En el caso de la figura se observa que dichas funciones lineales tienden a O cuando $x \to x_1$ por lo cual se podrá esccribir

$$\overline{MN} = a_1(x - x_1) \quad \text{y} \quad \overline{MP} = a_2(x - x_1)$$

luego

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} a_1 a_2 (x - x_1)^2 \text{ sen } \alpha \qquad (1)$$

La fórmula (1) nos dice que cuando $x \to x_1$, S_{MNP} tiende a cero, pero es un infinitésimo de segundo orden, por lo cual es tangente al eje x en el punto (x, o) de la representación gráfica de la ley de variación de las áreas.

Pasemos a considerar el caso segundo, en el cual la sección extrema contiene una arista del poliedro. Como siempre, la sección π es el límite de la π' cuando $x \to x_1$. Pero el área de esta sección sera:

$$S_{A'B'B''A''} = \frac{\overline{A'A''} \cdot \overline{B'B''} \text{ sen } \alpha}{2} + \frac{\overline{A''B''} \cdot \overline{B''B'} \text{ sen } \beta}{2}$$

y como al tender π' hacia π, A′A″ y B′B″ tienden a cero, pero A′B′ y A″B″ tienden a AB, al tender x hacia x_1 el infinitésimo $S_{A'B'B''A''}$ es de primer orden, lo que equivale a la segunda parte del enunciado del teorema.

Observando la figura de esta segunda parte del teorema se ve en el acto que lo hemos demostrado en el caso de que los vértices A y B son triaristas. Pero es inmediato ver que si ambos o uno de ellos tiene más de tres aristas del poliedro, resulta que el área de la sección es la suma de la $S_{A'A''B''B'}$ y de uno a dos polígonos, en los cuales todos sus lados y, por tanto sus diagonales tenderán a cero. Pero, por lo demostrado en el primer caso, al tender x hacia x_1, el área de dicho o dichos polígonos son infinitésimos de segundo orden, respecto al principal $(x - x_1)$ lo que nos demostrará este segundo caso con toda generalidad.

El dibujo de la figura adjunta nos prueba por sí mismo el caso tercero del teorema, con lo cual queda probado en todas sus facetas.

Representación gráfica de las distintas leyes de variación de las secciones de los poliedros regulares.—Los dos teoremas demostrados nos permiten dibujar fácilmente las leyes de variación de las áreas de los poliedros regulares al ser cortadas por una familia de planos paralelos. Pero además, el segundo teorema nos permite, en el caso de los poliedros regulares y arquimedianos clasificar las secciones más sencillas de las cuales pueden deducirse muchas propiedades analíticas y gráficas de los mismos.

También hemos deducido una regla práctica operatoria, muy sencilla, para la obtención rápida de los coeficientes α, β y γ de la ley $S = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ en los distintos casos, en casos particulares de simetría del cuerpo, pero lo mejor para deducir esta ley es tratar en particular de las leyes de variación de las áreas de estos poliedros e ir enunciando esas reglas prácticas al ir tratando de sus casos.