INVERSION PARCIAL DE SERIES Y SUS APLICACIONES

por

JOSE ANTONIO ESTRUGO Y ESTRUGO

I. JUSTIFICACIÓN

En la teoría de funciones complejas se demuestra que dada una serie de radio no nulo

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_kx^k + \ldots \qquad [1]$$

puede ser encontrado otro desarrollo de la forma

$$x = c_0 + c_1y + c_2y^2 + c_3y^3 + \ldots + c_ky^k + \ldots \qquad [2]$$

Los coeficientes $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = -a_2$, $c_3 = 2a_2^2 - a_3$, etc., pueden ser calculados sustituyendo [2] en [1], e identificando los coeficientes de las sucesivas potencias de x.

Con lo anterior, el problema queda teóricamente resuelto; pero en la práctica, cuando conocido y se desea hallar x, el desarrollo [2] resulta lento y difícil de obtener por no existir un proceso mecánico para hallar los c_i, debiendo el calculador idear artificios que tiendan a conseguir el valor incógnito por un medio más rápido. De todos los empleados han resultado más potentes aquellos que lograban la anulación de uno o dos términos consecutivos en la [1]; el intento de realizarlo con más de dos daba lugar a la resolución de ecuaciones de grado superior al segundo, alejando su aplicación a todas las cuestiones de carácter práctico.

El objeto del presente trabajo es conseguir la anulación de k términos consecutivos sobre la base de resolver una ecuación de primer grado en x, introduciendo para ello igual número de indeterminadas que términos se deseen eliminar.

II. Determinante inversor y columna-vector: Definiciones y propiedades

Dada la serie [1], en donde suponemos $o < a_2 < 1$, y $a_i > a_{i+1}$, se denominará *determinante inversor*, $\Delta(k)$, de los primeros coeficientes al que presenta la forma:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} 1 & -y & o & \cdots\cdots & o & o & o \\ a_2 & 1 & -y & \cdots\cdots & o & o & o \\ a_3 & a_2 & 1 & \cdots\cdots & o & o & o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-2} & a_{k-3} & a_{k-4} & \cdots\cdots & 1 & -y & o \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots\cdots & a_2 & 1 & -y \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots\cdots & a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix};$$

y columna-vector a la

$$\begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \\ \\ \cdot \\ a_{k-1} \\ a_k \\ a_{k+1} \end{vmatrix} \quad [3]$$

que comprende del segundo coeficiente al de lugar $\overline{k+1}$. En todo lo que sigue se supone $y > o$.

El determinante $\Delta(k)$, tiene las siguientes propiedades:

1.ª *Todos los términos del polinomio determinante son positivos.*—En efecto, como todos los elementos negativos ocupan el lugar $(i, i+1)$, son de clase impar y desarrollando el determinante de orden k y los sucesivos por los elementos de la última columna, que da lugar a otros determinates de forma idéntica, se evidencia lo indicado.

2.ª *El número de términos no nulos de* $\Delta(k)$, es 2^{k-1}.—Si desarrollamos como antes por la última columna a $\Delta(k)$, se obtienen dos determinantes de forma similar y siendo $N(\Delta(k)) = 2\,N(\Delta(k-1))$, resultará $N(\Delta(k)) = 2^{k-1}$, ya que el desarrollo de $\Delta(k-1)$, admite idéntica descomposición y así sucesivamente hasta $N(\Delta(2)) = 2$.

3.ª *Si sustituimos en $\Delta(k)$ su primera columna por la columna-vector* [3], *el determinante disminuye de valor.*—Si denominamos $\nabla(k)$ al determinante resultado de realizar dicha operación, se tendrá:

$$\nabla(k) = \begin{vmatrix} a_2 & -y & o & \dots\dots & o & o & o \\ a_3 & 1 & -y & \dots\dots & o & o & o \\ a_4 & a_2 & 1 & \dots\dots & o & o & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-3} & a_{k-4} & \dots\dots & 1 & -y & o \\ a_k & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots\dots & a_2 & 1 & -y \\ a_{k+1} & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots\dots & a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando $\Delta(k)$ y $\nabla(k)$ por los elementos de la primera columna

$$\left.\begin{aligned} \Delta(k) &= A_{11} + a_2A_{21} + a_3A_{31} + \,.\,. + a_kA_{k1} \\ \nabla(k) &= a_2A_{11} + a_3A_{21} + a_4A_{31} + \,.\,. + a_{k+1}A_{k1} \end{aligned}\right\} \quad [4]$$

y teniendo en cuenta que los adjuntos A_{i1}, tienen el mismo valor en ambos determinantes y que $a_{i+1} < a_i$ se evidencia, tal como deseábamos, que

$$\Delta(k) > \nabla(k)$$

Contrario resultado obtendríamos si se verificara que $a_2 > 1$ y $a_{i+1} > a_i$.

4.ª *Existe la relación de recurrencia $\Delta(k+1) = \Delta(k) + \nabla(k)y$.*—Si consideramos ahora $k+1$, coeficientes, se formará el determinante

$$\Delta(k+1) = \begin{vmatrix} 1 & -y & O & \dots\dots & o & o & o \\ a_2 & 1 & -y & \dots\dots & o & o & o \\ a_3 & a_2 & 1 & \dots\dots & o & o & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots\dots & 1 & -y & o \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots\dots & a_2 & 1 & -y \\ a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \dots\dots & a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix}$$

que desarrollado por la primera fila, nos hace evidente la ley de recurrencia:

$$\Delta(k + 1) = \Delta(k) + \nabla(k)y, \qquad [5]$$

de utilidad más adelante.

5.ª Las expresiones obtenidas en [4] permiten calcular directamente $\Delta(k)$ y $\nabla(k)$ en función de $\Delta(2)$, $\Delta(3)$ ... $\Delta(k - 1)$, sin más que tener en cuenta la relación fácil de deducir:

$$A_{t1} = \Delta(k - t)y^{t-1} \qquad [6]$$

con lo cual, la [4] puede escribirse:

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \Delta(k-1) + a_2\Delta(k-2)y + a_3\Delta(k-3)y^2 + \dots \\ \nabla(k) &= a_2\Delta(k-1) + a_3\Delta(k-2)y + a_4\Delta(k-3)y^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \dots &+ a_{k-1}\Delta(1)y^{k-2} + a_k y^{k-1} \\ \dots &+ a_k\ \Delta(1)y^{k-2} + a_{k+1}y^{k-1} \end{aligned}\right\} \qquad [7]$$

y en forma simbólica, siendo $a_1 = 1$:

$$\Delta(k) = \sum_{1}^{k} a_t\,\Delta(k - t)y^{t-1} \qquad \nabla(k) = \sum_{1}^{k} a_{t+1}\,\Delta(k - t)y^{t-1}$$

III.—Teorema fundamental

Dada una serie de radio no nulo

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_4x^4 + \dots$$

se pueden multiplicar ambos miembros sucesivamente por $\alpha_i x^i (i = 1, 2, 3 \dots k)$, siendo α_i indeterminadas, y sumar los resultados, con lo que se obtiene:

$$\begin{array}{ll|l|l|l} y & = x + a_2 & x^2 + \quad a_3 & x^3 + \quad a_4 & x^4 + \dots \\ y\alpha_1 x & = \quad + \alpha_1 & \quad + a_2\alpha_1 & \quad + a_3\alpha_1 & \\ y\alpha_2 x^2 & = & \quad \alpha_2 & \quad a_2\alpha_2 & \\ y\alpha_3 x^3 & = & & \quad \alpha_3 & \\ \dots\dots & & & & \\ y\alpha_{k-1}x^{k-1} & = & & & \\ y\alpha_k x^k & = & & & \end{array} \qquad [8]$$

$$\begin{array}{r|r|r|l} +a_k & x^k + \quad a_{k+1} & x^{k+1} + \quad a_{k+2} & x^{k+2} + \dots \\ a_{k-1}\alpha_1 & a_k\alpha_1 & a_{k+1}\alpha_1 & \\ a_{k-2}\alpha_2 & a_{k-1}\alpha_2 & a_k\alpha_2 & \\ a_{k-3}\alpha_3 & a_{k-2}\alpha_3 & a_{k-1}\alpha_3 & \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \\ \alpha_{k-1} & a_2\alpha_{k-1} & a_3\alpha_{k-1} & \\ & \alpha_k & a_2\alpha_k & \end{array}$$

Por ser el desarrollo de y convergente y el proceso vertical limitado, será también convergente la suma creada en [8], ya que cada sumando es el resultado de haber multiplicado y por cantidades constantes, aunque de momento indeterminadas, y potencias sucesivas de x.

Si ahora hacemos cumplir a las indeterminadas α_i la condición de que los coeficientes de las potencias verticales del primer miembro, a partir de x^2, ıgualen a sus respectivos del segundo y además qu , el coeficiente de x^{k+1} sea nulo, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_1 - y\alpha_2 = -a_2 \\
a_2\alpha_1 + \alpha_2 - y\alpha_3 = -a_3 \\
a_3\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \alpha_3 = -a_4 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{k-2}\alpha_1 + a_{k-3}\alpha_2 + a_{k-4}\alpha_3 \ldots\ldots + \alpha_{k-2} - y\alpha_{k-1} = -a_{k-1} \\
a_{k-1}x_1 + a_{k-2}\alpha_2 + a_{k-3}\alpha_3 \ldots\ldots + a_2\alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} - y\alpha_k = -a_k \\
a_k\alpha_1 + a_{k-1}\alpha_2 + a_{k-2}\alpha_3 \ldots\ldots + a_3\alpha_{k-2} + a_2\alpha_{k-1} + \alpha_k = -a_{k+1}
\end{array}\right| \quad [9]$$

Sustituyendo en [8] las condiciones [9] que se imponen, queda la pıimera con k términos consecutivos nulos, pudiéndose escribir:

$$y + y\alpha_1 x = x + B_{k+2}x^{k+2} + B_{k+3}x^{k+3} + \ldots$$

$$[B_{k+t} = \sum_{i=o}^{i=k} a_{k+t-i}\alpha_i]\ (\alpha_0 = 1)$$

De la expresión anterior despejando x y designando por $\alpha_1^{(k)}$ la primera indeterminada al objeto de señalar el número de coeficientes que intervienen, queda

$$x = \frac{y}{1 - \alpha_1^{(k)}y}\ [10], \qquad \text{siendo} \qquad \xi_{k+2} = \frac{1}{1 - \alpha_1^{(k)}y}\sum_{2}^{\infty} B_{k+t}x^{k+t}$$

lo que nos permite enunciar el siguiente teorema:

«Dada una serie potencial convergente cuya suma es conocida, puede ser realizada una inversión parcial y determinar el valor de la variable mediante la expresión $x = y\,|1 - \alpha_1^{(k)}y$, con error igual al de potencias de dicha variable del orden $k + 2$ y sucesivas, conseguida la anulación de k términos consecutivos en su desarrollo original (1).»

---

(1) Siempre que se demuestre que $\lim\limits_{k \to \infty} \xi_{k+2}. = 0$, se podrá realizar una inversión total encontrándose que $x = y \mid 1 - \alpha^{(\infty)}y$, resultando en este caso la constante $\alpha_1^{(\infty)}$ el cociente del límite de dos determinantes infinitos.

IV.—Calculo de la indeterminada $\alpha_1^{(k)}$

En aquellos casos prácticos en que el valor de ξ_{k+2} se considere despreciable a la aproximación pedida, el valor de x viene dado por el solo cálculo de la indeterminada $\alpha_1^{(k)}$ que seguidamente realizaremos.

Habida cuenta que [9] constituye un sistema determinado de orden k, se puede aplicar la regla de Cramer, dándonos para el valor de $\alpha_1^{(k)}$ el siguiente:

$$\alpha_1^{(k)} = \begin{vmatrix} a_2 & -y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 1 & -y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-3} & a_{k-4} & \dots & 1 & -y & 0 \\ a_{k-} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_2 & 1 & -y \\ a_{k+1} & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 & a_2 & 1 \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 1 & -y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & -y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-2} & a_{k-3} & a_{k-4} & \dots & 1 & -y & 0 \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_2 & 1 & -y \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\nabla(k)}{\Delta(k)} \qquad [11]$$

luego el valor de la indeterminada $\alpha_1^{(k)}$ viene dado por el cociente de $-\nabla(k)$ por el determinante inversor.

Las restantes indeterminadas $\alpha_i^{(k)}$ se obtienen cambiando el numerador de [11] por el determinante inversor al que hemos sustituido la columna i-ésima por el vector columna.

Al considerar este valor [11] en la [10] se obtendrá el de $x^{(k)}$, representando el exponente simbólico el número de indeterminadas elegidas

$$x^{(k)} = \frac{y}{1 - \alpha_1^{(k)} y} = \frac{y}{1 + \dfrac{\nabla(k)}{\Delta(k)}\, y} = \frac{y\Delta(k)}{\Delta(k) + \nabla(k) y} =$$

$$= y\,\frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)}\ (1) \qquad [12]$$

---

(1) Este valor, sustituido en la fórmula del error nos suministra la expresión:

$$\xi_{k+2} = \frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)} \sum_{2}^{\infty} B_{k+t} x^{k+t}$$

teniendo en cuenta [5], lo que nos permite calcular el valor de la variable en función sólo de dos determinantes inversores de órdenes consecutivos.

V. Límite de oscilación de la indeterminada $\alpha_1^{(k)}$

Obtenido en [11] el valor de

$$\alpha_1^{(k)} = -\frac{\nabla(k)}{\Delta(k)}$$

y habida cuenta de las igualdades conseguidas en [7], se tiene en principio:

$$|\alpha_1^{(k)}| = \frac{a_2\Delta(k-1) + a_3\Delta(k-2)y + \ldots + a_{k+1}y^{k-1}}{\Delta(k-1) + a_2\Delta(k-2)y + \ldots + a_k y^{k-1}}$$

y por una propiedad notable de la serie de razones desiguales

$$a_2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \left| \alpha_1^{(k)} \right| \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

valores extremos que sustituidos en [10] nos darán, en general, aproximaciones groseras, por defecto y por exceso, del valor de la variable

$$\frac{y}{1 + a_2 y} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} x^{(k)} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{a_k y}{a_k + a_{k+1}y} \qquad [13]$$

VI.—Sobre la aproximación

Si realizamos el cociente en [12], se obtiene:

$$\begin{aligned} x = y + c_2y^2 + c_3y^3 + \ldots + c_{k+1}y^{k+1} + \\ + \delta_{k+2}y^{k+2} + \delta_{k+3}y^{k+3} + \ldots \end{aligned} \qquad [14]$$

en donde los coeficientes c_2, c_3 ... c_{k+1}, coinciden con los expresados en [2] al definir la inversión total.

El error, expresado en [10] en función potencial de la variable, puede ahora ser establecido por la diferencia

$$\varepsilon_{k+2} = (c_{k+2} - \delta_{k+2})y^{k+2} + (c_{k+3} - \delta_{k+3})y^{k+3} + \ldots \qquad [15]$$

dependiente ahora exclusivamente de la función y.

El cálculo por [10] o bien por [15] del error dependerá exclusivamente de la comodidad del calculador, debiendo hacerse resaltar que tanto en uno como en otro caso, y salvo en el de funciones cuya inversa sea concocida, su determinación es muy laboriosa a medida que el valor de k aumenta.

La [15] indica claramente que el método señalado por nosotros para la inversión parcial conducirá a una mayor aproximación que si calculáramos directamente los $k + 1$ coeficientes de [2] siempre que c_{k+t}. y δ_{k+t}. sean del mismo signo y $|\delta_{k+t}| < 2 | c_{k+t}|$.

VII.—Aplicaciones

I.—Sea la serie

$$y = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \qquad [16]$$

Según [12], tendremos:

$$x^{(k)} = y \frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)} \qquad [17]$$

siendo ahora

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} 1 & -y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & -y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ \frac{1}{(k-2)!} & \frac{1}{(k-3)!} & \frac{1}{(k-4)!} & \dots & 1 & -y & 0 \\ \frac{1}{(k-1)!} & \frac{1}{(k-2)!} & \frac{1}{(k-3)!} & \dots & \frac{1}{2!} & 1 & -y \\ \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k-1)!} & \frac{1}{(k-2)!} & \dots & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 \end{vmatrix} \qquad [18]$$

y el error cometido

$$\varepsilon_{k+2} = \frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)} \sum_{2}^{\infty} B_{k+t} x^{k+t}$$

II.—Supongamos deseamos resolver la ecuación

$$e^x = 1{,}64872 \qquad (x = 0{,}5)$$

En este caso

$$y = e^x - 1 = 0{,}64872$$

Calculando las sucesivas Δ, para luego aplicar [17], tendremos:

$$\Delta(1) = 1$$

$$\Delta(2) = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}64872 \\ \dfrac{1}{2\,!} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0{,}32436 = 1{,}32436$$

$$\Delta(3) = \begin{vmatrix} 1 & -\ 0{,}64872 & 0 \\ \dfrac{1}{2!} & 1 & -0.64872 \\ \dfrac{1}{3!} & \dfrac{1}{2!} & 1 \end{vmatrix} = 1.71885$$

$$\Delta(4) = \begin{vmatrix} 1 & -\ 0{,}64872 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2!} & 1 & -0{,}64872 & 0 \\ \dfrac{1}{3!} & \dfrac{1}{2!} & 1 & -0{,}64872 \\ \dfrac{1}{4!} & \dfrac{1}{3!} & \dfrac{1}{2!} & 1 \end{vmatrix} = 2.22993$$

Limitándonos a los anteriores valores, obtenemos:

$$x^{(1)} = 0{,}64872 \cdot \frac{\Delta(1)}{\Delta(2)} = \frac{0{,}64872}{1{,}32436} = 0{,}4898\ldots$$

$$x^{(2)} = 0{,}64872 \cdot \frac{\Delta(2)}{\Delta(3)} = \frac{0{,}85914}{1{,}71885} = 0{,}4998\ldots$$

$$x^{(3)} = 0{,}64872 \cdot \frac{\Delta(3)}{\Delta(4)} = \frac{1.115052}{2.22993} = 0{,}50004\ldots$$

Si se deseara continuar el cálculo, no es preciso hallar directamente Δ(5); basta aplicar por conocerse Δ(2), Δ(3) y Δ(4), la fórmula de recurrencia hallada en [7].

III.—Como sabemos, la inversa de la función

$$y = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

es válida para $|y| < 1$

$$x = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots = \log_e(1 + y)$$

Como comprobación, si desarrollamos los determinantes $\Delta(3)$ y $\Delta(4)$ formados según [18] del ejercicio I, se tiene

$$x^{(3)} = y\,\frac{\Delta(3)}{\Delta(4)} = y\,\frac{1 + y + \frac{1}{6}y^2}{1 + \frac{3}{2}y + \frac{7}{12}y^2 + \frac{1}{24}y^3} =$$

$$= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{29}{144}y^5 + \ldots \qquad [19]$$

viéndose coincide en sus cuatro primeros términos con la serie inversa de $e^x - 1$, siendo

$$e_a < \left(\frac{29}{144} - \frac{1}{5}\right) y^5 = \frac{1}{720}\,y^5$$

Como para $y = 1$, sabemos que x representa el $\log_e 2$, si damos este valor en

$$x^{(3)} = y\,\frac{1 + y + \frac{1}{6}y^2}{1 + \frac{3}{2}y + \frac{7}{12}y^2 + \frac{1}{24}y^3} = \frac{13/6}{75/24} = \frac{52}{75} = 0{,}6933\ldots$$

obteniendo $\log_e 2$ con $e_a < 0{,}0002$.

IV. Dado el desarrollo

$$y = \log_e(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \pm \ldots$$

según [12], tendremos:

$$x^{(k)} = y\,\frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)}, \qquad \varepsilon_{k+2} = \frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)} \sum_{2}^{\infty} B_{k+t}\, x_{k+t} \qquad [20]$$

resultando para este caso

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} 1 & -y & \dots & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{k-1}\dfrac{1}{k-2} & (-1)^{k-2}\dfrac{1}{k-3} & \dots & -y & 0 \\ (-1)^{k}\dfrac{1}{k-1} & (-1)^{k-1}\dfrac{1}{k-2} & \dots & 1 & -y \\ (-1)^{k+1}\dfrac{1}{k} & (-1)^{k}\dfrac{1}{k-1} & \dots & -\dfrac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \qquad [21]$$

V. Algunos de los coeficientes pueden ser nulos, favoreciéndose de esta forma los calculos. Así, por ejemplo, si deseáramos hallar el valor de x conocido

$$y = \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots (-1)^{k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \pm \dots$$

el valor del determinante inversor sería:

$$\Delta(2k+1) = \begin{vmatrix} 1 & -y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{3!} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} & 0 & \dots & -y & 0 \\ 0 & \dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} & \dots & 1 & -y \\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad [22]$$

VI. Para el caso

$$y = \text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \ldots (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

el determinante inversor tiene forma idéntica al [22], suprimiendo en los denominadores el signo factorial.

VII. Cálculo del tanto de interés en las rentas ciertas.

De las igualdad fundamental

$$a = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \qquad [23]$$

se llega desarrollando el binomio, simplificando y dividiendo por n:

$$\frac{a}{n} = 1 - \frac{n+1}{2} i + \frac{(n+1)(n+2)}{6} i^2 -$$

$$- \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{24} i^3 + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120} i^4 \pm$$

y de aquí

$$A = \frac{n-a}{n(n+1)/2} = i - \frac{n+2}{3} i^2 + \frac{(n+2)(n+3)}{12} i^3 -$$

$$- \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{60} i^4 \pm \qquad [24]$$

que presenta la forma [1] y, por tanto,

$$i^{(k)} = A \frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)} \qquad [25]$$

dependiendo la aproximación que se consiga del valor que asignemos a k en los cálculos.

Limitándonos al valor $k = 3$, suficiente en las aplicaciones, tendremos

$\Delta(3) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -A & 0 \\ -\dfrac{n+2}{3} & 1 & -A \\ \dfrac{(n+2)(n+3)}{12} & -\dfrac{n+2}{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{2(n+2)}{3} A +$$

$$+ \frac{(n+2)(n+3)}{12} A^2$$

$$\Delta(4) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -A & 0 & 0 \\ -\dfrac{n+2}{3} & 1 & -A & 0 \\ \dfrac{(n+2)(n+3)}{12} & -\dfrac{n+2}{3} & 1 & -A \\ -\dfrac{n(+2)(n+3)(n+4)}{60} & \dfrac{(n+2)(n+3)}{12} & -\dfrac{n+2}{3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - (n+2)A + \frac{(n+2)(5n+13)}{18}A^2 - \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{60}A^3.$$

Por tanto, sustituyendo en [24], tendremos:

$$i^{(3)} = \qquad [26]$$

$$A\frac{180 - 120(n+2)A + 15(n+2)(n+3)A^2}{180 - 180(n+2)A + 10(n+2)(5n+13)A^2 - 3(n+2)(n+3)(n+4)A^3}$$

Como aplicación de la fórmula (26) resolveremos el siguiente problema:

Se desea calcular el tipo de interés que sirvió para evaluar la renta $a_{20} = 13{,}5903263$.

Teniendo en cuenta el valor de A, dado en (24)

$$A = \frac{20 - 13{,}5903263}{210} = 0{,}030.522.2$$

$$i^{(3)} = A\frac{180 - 2.640A + 7.590A^2}{180 - 3.960A + 24.860A^2 - 36.432A^3} =$$

$$= \frac{3.2503468}{81{,}245764} = 0{,}040006$$

El tanto exacto es $i = 0{,}04$.

Los ejemplos pueden prodigarse y cada motivo de aplicación ser desarrollado en forma similar a los que anteriormente hemos expuesto.