NOTAS DE DIVULGACION

TRANSFORMACIONES DE DETERMINANTES QUE CONSERVAN ELEMENTOS CONTIGUOS

Por
JUAN TORRES NOGUERA

En todo determinante pueden practicarse las transformaciones:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{nn} \dots a_{2n} & a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{n2} \dots a_{22} & a_{12} \\ a_{n1} \dots a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{nn} \dots a_{n2} & a_{n1} \\ \dots & \dots \\ a_{2n} \dots a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} \dots a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}$$

Estas transformaciones, es decir

T_1 = Idéntica,

T_2 = Simetría respecto de la diagonal principal,

T_3 = Simetría respecto de la diagonal secundaria y

T_4 = Simetría central

no alteran el valor del determinante.

Nótese que estas transformaciones forman grupo y que éste resulta isomorfo con el subgrupo de movimientos citado los cuales transforman un cuadrado en sí mismo.

Antes de ocuparnos de las demostraciones, añadiremos que para todo determinante también se verifica:

$$(-1)^{\sigma}\cdot\Delta = \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{n2} \\ a_{11} & a_{21} \ldots a_{n1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{n1} \ldots a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} \ldots a_{22} & a_{12} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{nn} \ldots a_{2n} & a_{1n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1n} \ldots a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} \ldots a_{22} & a_{21} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{nn} \ldots a_{n2} & a_{n1} \end{vmatrix}$$

en donde

$$\sigma = \frac{n(n-1)}{2}$$

De otro modo, podemos añadir que las transformaciones:

T_5 = Giro de un ángulo recto en sentido positivo,
T_6 = Giro de un ángulo recto en sentido negativo,
T_7 = Simetría de eje horizontal y
T_8 = Simetría de eje vertical.

no alteran el valor del determinante o lo cambian de signo según que σ resulte, respectivamente, par o impar.

Añadiremos, identificando grupos isomorfos, que estas últimas transformaciones completan el grupo de movimientos que llevan a coincidir un cuadrado consigo mismo. Designaremos dicho grupo por G.

Basta demostrar solamente que:

a) $\Delta T_2 = \Delta$.
b) $\Delta T_8 = (-1)^{\sigma}\cdot\Delta$.

En efecto, dando por ciertas estas dos relaciones, se verifica:

$$\begin{aligned}
\Delta T_1 &= (\Delta T_2)T_2 = \Delta T_2 = \Delta \\
\Delta T_3 &= [(\Delta T_8)T_2]T_8 = [(-1)^{\sigma}\cdot\Delta T_2]T_8 = (-1)^{\sigma}\cdot\Delta T_8 = \\
&= (-1)^{2\sigma}\cdot\Delta = \Delta \\
\Delta T_4 &= \{[(\Delta T_2)T_8]T_2\}T_8 = [(\Delta T_8)T_2]T_8 = [(-1)^{\sigma}\cdot\Delta T_2]T_8 = \\
&= (-1)^{\sigma}\cdot\Delta T_8 = (-1)^{2\sigma}\cdot\Delta = \Delta \\
\Delta T_5 &= (\Delta T_8)T_2 = (-1)^{\sigma}\cdot\Delta T_2 = (-1)^{\sigma}\cdot\Delta \\
\Delta T_6 &= (\Delta T_2)T_8 = \Delta T_8 = (-1)^{\sigma}\cdot\Delta \\
\Delta T_7 &= [(\Delta T_2)T_8]T_2 = (\Delta T_8)T_2 = (-1)^{\sigma}\cdot\Delta T_2 = (-1)^{\sigma}\cdot\Delta
\end{aligned}$$

En otros términos: T_2 y T_8 son elementos generadores de G.

Siendo de todos conocida la relación *a*), falta demostrar únicamente *b*). Para ello estableceremos en primer lugar el siguiente resultado:

Si ordenamos en sentido inverso los n elementos de una permutación dada, obtendremos una nueva permutación, que será de la misma clase o de la clase distinta, según que resulte par o impar, respectivamente, el número combinatorio $\binom{n}{2}$. En efecto, aquellos pares de elementos que forman sucesión respecto de la permutación dada, presentan inversión en la nueva, es decir, la suma de los números de inversiones en ambas permutaciones vale $\binom{n}{2}$.

Recordemos ahora que por definición de determinante

$$\Delta = \Sigma (-1)^{\upsilon} a_{1s_1} a_{2s_1} a_{3s_1} \dots a_{ns_n}$$

en donde υ es el número de inversiones de la permutación $s_1, s_2, s_3 \dots s_n$. La suma Σ se extiende a todas las $n!$ permutaciones con los subíndices que figuran en segundo lugar.

En consecuencia, para la transformación T_8, es decir, para la simetría de eje vertical, se tiene

$$\Delta T_8 = [\Sigma(-1)^{\upsilon} a_{1,s_1} a_{2,s_2} \dots a_{n,s_n}]T_8 =$$

$$= (-1)^{\sigma}[\Sigma(-1)^{\upsilon+\sigma} a_{1,s_n} \dots a_{n-1,s_2} a_{n,s_1}] = (-1)^{\sigma} \cdot \Delta$$

En efecto, dicha transformación equivale a escribir los subíndices $s_1, s_2 \dots s_n$ en orden inverso.