SOLUÇÃO DE PROBLEMAS SÔBRE CÔNICAS UTILIZANDO PROJEÇÕES DE SECÇOES PLANAS DE CONES

Por

JAYME MACHADO CARDOSO

1. A utilização da correspondência homológica (afinidade) entre a elipse e a circunferência principal na resolução dos problemas relativos à elipse sugere construções análogas para a hipérbole e a parábola. Tais cônicas (hipérbole e parábola) são homológicas da circunferência e a geometria descritiva oferece um modo deveras simples de estabelecer esta homologia, como veremos a seguir.

Consideremos um cone de revolução de eixo vertical, limitado por uma base situada no plano horizontal de projeção. A secção produzida em tal cone por um plano (que suporemos de tôpo) é uma cônica que como é conhecido, se projeta horizontalmente segundo uma cônica da mesma espécie, sendo que a projeção do vértice do cone é um de seus focos. As projeções hoirozntais da secção e da base são correspondentes na homologia cujo centro é o foco indicado e cujo eixo é o traço horizontal do plano secante.

Examinemos o caso parábola, supondo conhecida a direção do eixo, que sempre pode ser obtida pela aplicação do teorema de Brianchon.

2. Suponhamos que a parábola é dada por vértice V e foco F. Tomando o ponto F como projeção horizontal do vértice de um cone de eixo vertical e base (de raio maior que o semi-parâmetro da parábola) situada sôbre o plano horizontal de projeção, construimos inmediatamente a projeção vertical do cone e o plano secante, cujo traço horizontal fornece o eixo da homologia. (Fig. 1).

Em primeiro lugar note-se que a posição do eixo não depende da cota do vértice do cone. Realmente, pois os triângulos A'F'B' e A'V'R' são semelhantes. Variando F' sôbre o exio, o lado A'B' não varia, o

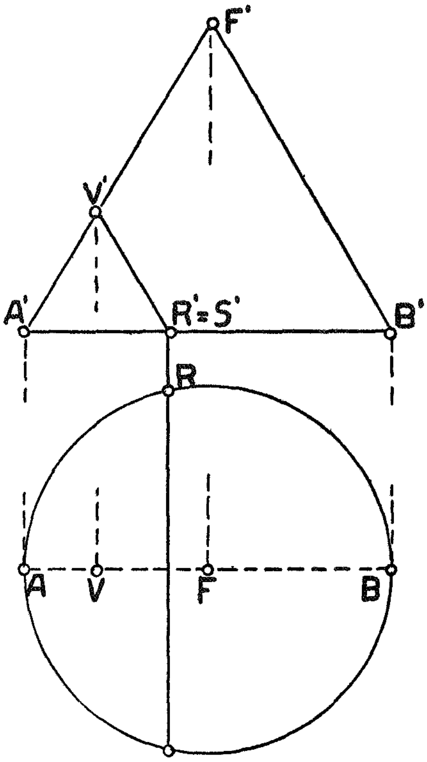

Fig. 1

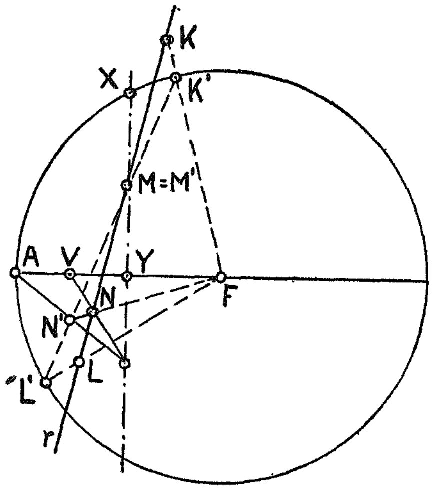

Fig. 2

mesmo ocorrendo com o lado A'R' do segundo triângulo. Além disso, por construção, o ponto V é equidistante do eixo e do ponto A, dispensando, portanto, a construçao da projeàão vertical para o establecimento da homologia que se desejava. Com efeito, basta traçar com centro em F uma circunferência de raio maior que o semi-parâmetro e conduzir a perpendicular à VF entre V e F e distando de V de uma grandeza igual á diferença entre o raio da circunferência e o semi-parâmetro.

Suponhamos, por exemplo, que se queira construir os pontos de intersecçao de uma reta com uma parábola dada pelo vértice V e foco F.

Construimos uma circunferência com centro em F e raio de comprimento maior que a distância VF. Traçamos a reta XY, normal à VF e tal que sejam iguais as distâncias AV e VY. A homologia fica, como acabamos de ver, definida pelo eixo XY, dentro F e o par de pontos correspondentes A e V. Dada a reta $r = MN$, construimos a homológa M'N', que corta a circunferência nos pontos K' e L'. As retas que unem os pontos K' e L' com o centro da homologia cortam a reta dada *r* nos pontos K e L procurados. (Fig. 2).

3. Consideremos o caso em que a parabola é dada mediante eixo, vértice e um ponto.

Fazendo o eixo de homologia passar pelo ponto dado P, podemos construir o plano secante, que terá traço horizontal passando por P e traço vertical arbitrário. Em consequência fica determinado o cone auxiliar. Com efeito, pois V'A' forma com a linha de terra o mesmo ângulo que P'V'. Obtido A' teremos, imediatamente, o ponto A no eixo da parábola. O foco da parábola (projeção horizontal do vértice do cone) estará na intersecção do eixo VA com a mediatriz de AP. Como a distância de A à V é igual à distância das retas de chamada de V

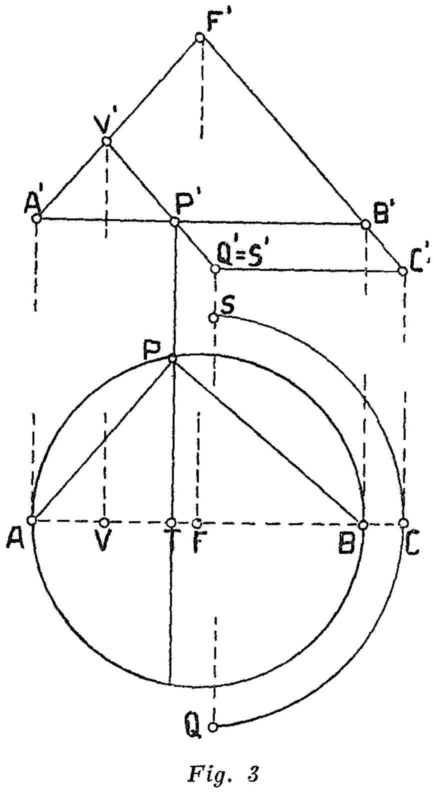

Fig. 3

e P, é evidente que, para estabelecer a homologia, podemos dispensar a projeção vertical. (Fig. 3).

A homologia fica, então, definida pelo eixo PQ, centro F, e o par de pontos correspondentes A (na circunferência) e V (na parábola).

4. Seja, agora, a parábola dada por uma tangente e seu ponto de contacto, um ponto e a direção do eixo.

Para tal, seja o cone de revolução de eixo vertical, vértice F e base APB situada no plano horizontal de projeção, seccionado segundo uma parábola pelo plano de tôpo de traços V′P′ e P′P. O plano hozizontal de C fornece dois pontos da parábola secção. As retas AP e PB são, respectivamente, a tangente e a normal em P, posto que a distância de A e V é igual ao semi-parâmetro. Esta observação resolve a questão. (Fig. 4).

Assim, seja a parábola dada pela tangente *t*, seu ponto de contacto P, um ponto próprio Q e o ponto impróprio. Considerando P sôbre

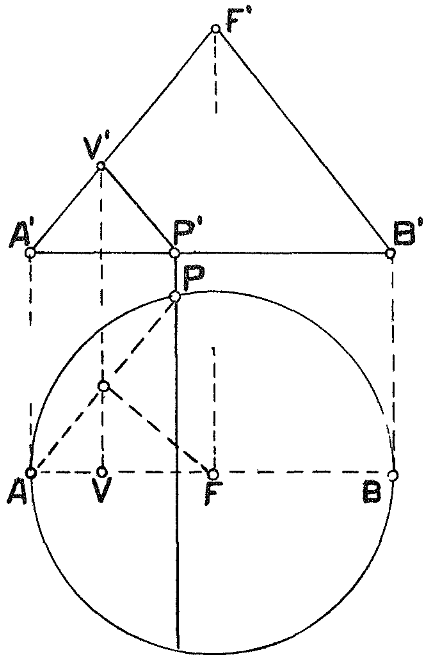

Fig. 4

o plano horizontal de projeção, podemos construir o plano secante, cujo traço horizontal (eixo da homologia) é perpendicular à linha de terra conduzida de P e cujo traço vertical é arbitrário.

Construimos a normal *n* e conduzimos uma reta arbitrária paralela ao aixo, que corta *t* e *n* nos pontos X e Y, respectivamente. A reta que une P com o ponto Z, médio de XY, passa pelo centro da base do cone (foco da parábola e centro da homologia). (Fig. 5).

Para obter êste centro baste tomar sôbre PZ um ponto W no semiplano de *t* que não contém Q e cuja distância à P é igual à distância entre as retas de chamadas de P e Q. A mediatriz do segmento QW corta PZ no centro F procurado.

Conhecido o centro F da homologia, as considerações feitas no número anterior per miten obter o vértice V da parábola sem que haj necessidade da projeção vertical, pois V é equidistante de A e T.

5. A parábola é dada por três pontos (necessáriamente não alinhados) e pela direçao do eixo.

Sjam A, B e C os pontos dados. Considerando C sôbre o plano horizontal de projeção, a projeção horizontal da base do cone auxiliar

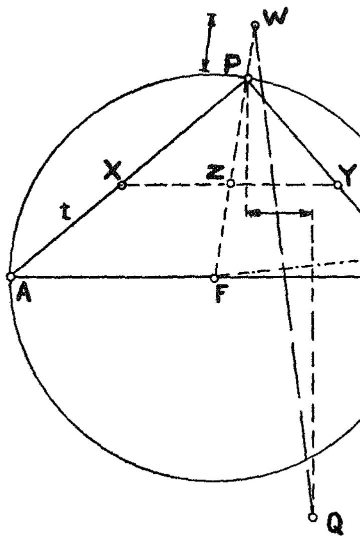

Fig. 5

será uma circunferência que passa por C. O ponto B pertenecerá a um plano horizontal cuja distância ao plano de C é igual à distância das retas de chamada (perpendiculares à durecão do eixo) dêsses pontos. Então, a projeção horizontal da base é tangente à circunferência de centro em B e cujo raio é a distância das retas de chamada de B e C. O mesmo raciocínio se aplica ao ponto A. Em suma: o foco da parábola é o centro da circunferência que passa por C e é tangente às circunferências de centro em A e B e de raios iguais, respectivamente, às distâncias das retas de chamada de C, A e C, B (*).

6. Os dois caos restantes se reduzem aos já vistos.

(1) A parábola é dada por duas tangentes *a*, *b* e o ponto A de contacto da primeira, além da direção do eixo.

Los pontos de contacto são equidistantes da paralela ao eixo conduzida da interesecção das tangentes. Então, é imediata a construcão

(*) Ver, p. ex., DOWSETT - *Advanced construtive geometry.* Oxford Univ. Press, pág. 24.

do ponto de contacto da tangente *bm* recaindo-se no caso examinado em 4.

(2) A parábola é dada por três tangentes e a direção do eixo. Pela propriedade indicada em (1) resulta imediata a construção dos pontos

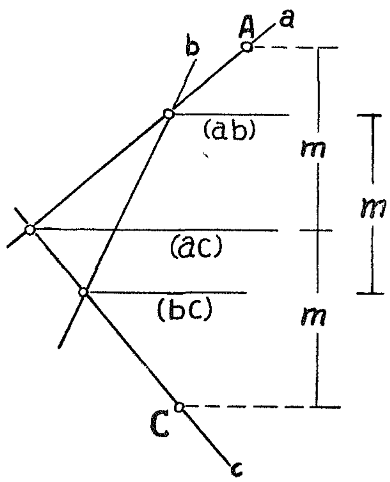

Fig. 6

de contacto das tangentes. De fato, sejam, por exemplo, *a*, *b*, *c*, as tangentes dadas. Indiquemos como (*ab*), (*bc*) e (*ac*) as paralelas ao eixo conduzidas, respectivamente, dos pontos comuns à *ab*, *bc* e *ac*. Os pontos A e C de contactos das tangentes *a*, *c* distarão de (*ac*) de uma grandeza igual à distância das retas (*ab*) e (*bc*), como é fácil verificar. (Fig. 6).