LA CONMUTATIVIDAD EN LA POTENCIACION

por

EMILIO PEREZ CARRANZA

En los primeros cursos de Aritmética suele indicarse que la potenciación es, en general, una operación no conmutativa. Ello se prueba con un sencillo contraejemplo, tal como $2^3 \neq 3^2$.

Pero no deja tampoco de considerarse el ejemplo $2^4 = 4^2$, en que sí se verifica tal propiedad.

Surge así la cuestión de estudiar qué numeros permiten aplicar esa propiedad conmutativa de la potenciación.

O, lo que es lo mismo, utilizando la notación moderna del cuantificador existencial $\exists$:

$$\exists(x, y)? \quad ,, \quad \boxed{x^y = y^x} \qquad [1]$$

que leeremos así: ¿existen valores de x e y (y cuáles son) que satisfacen a la ecuación [1]?

En esta resolución de [1] distinguiremos los siguientes casos (supuesto, desde luego, que x e y son necesariamente positivos):

1.º x e y son naturales. O sea: x e y pertenecen al conjunto N^+ (de números naturales, sin el cero).

2.º x e y son racionales (o pertenecientes al conjunto Q^+, de números racionales positivos).

3.º x e y son reales cualesquiera (o pertenecientes al conjunto R^+ de números reales positivos).

Notemos, ante todo, que siendo [1] ecuación simétrica en x e y, toda solución (x, y) se completa con la (y, x).

Primer caso.—Con moderna notación se indica así:

$$x \in N^+, \; y \in N^+ \quad ; \quad \exists(x, y)? \; \boxed{x^y = y^x} \qquad [1]$$

que leeremos diciendo:

x e y pertenecen al conjunto N+; ¿existen valores (y cuáles son) que satisfacen a [1]?

En la resolución de [1] prescindimos de la solución trivial $x = y$.

Supondremos, pues, que x e y son desiguales, lo que permite considerar que es $x > y$. Luego, podemos poner

$$x = y + z \quad \text{en donde} \quad z \in N^+$$

Sustituyendo esa expresión de x en el segundo miembro de [1] y simplificando después, se obtiene:

$$x^y = y^y \cdot y^z \quad \text{de donde} \quad (x : y)^y = y^z \qquad [2]$$

Esta ecuación [2] prueba que (admitida una solución x, y) y divide a x y, por tanto, también a $z = x - y$.

Pongamos, pues,

$$z = yn \quad \text{de donde} \quad x = y(n + 1) \quad (n \in N^+)$$

Resulta así de [2]:

$$(n + 1)^y = y^{yn} \quad \text{de donde} \quad n + 1 = y^n \qquad [3]$$

Como evidentemente es $y > 1$, podemos escribir

$$y = 1 + t \quad (t \in N^+)$$

Sustituyendo en [3] y operando sucesivamente sale:

$$n + 1 = (1 + t)^n = 1 + nt + \binom{n}{2} t^2 + \binom{n}{3} t^3 + \ldots$$

de donde, simplificando, resulta:

$$n(t - 1) + \binom{n}{2} t^2 + \binom{n}{3} t^3 + \ldots = 0$$

Notemos que ninguno de los términos de esta última suma puede ser negativo; luego todos ellos deben ser nulos. Es decir:

$$t - 1 = 0 \quad n < 2, \quad \text{de donde} \quad n = 1$$

Poniendo los valores encontrados $t = 1$, $n = 1$ en anteriores expresiones de x e y, sale fácilmente

$$y = 2 \quad . \quad x = 4$$

Anteriormente hemos supuesto $x > y$. Pero podíamos también haber considerado $x < y$, de donde con el mismo razonamiento anterior hubiéramos obtenido $x = 2$, $y = 4$.

En conclusión: Del conjunto N^+ sólo los números naturales (desiguales) 2 y 4 cumplen la propiedad conmutativa de la exponenciación.

Segundo caso.—Con notación análoga a la del primer caso escribiremos ahora:

$$x \varepsilon Q^+ \quad , \quad y \varepsilon Q^+ \quad ; \quad \exists (x, y)? \quad \boxed{x^y = y^x} \qquad [1]$$

Como anteriormente supondremos que es $x > y$,, lo que permite escribir, al ser x e y racionales,

$$x = \frac{n + m}{n} y \qquad (n \in N^+ \quad , \quad m \in N^+)$$

Sustituyendo x por esa última expresión en el segundo miembro de [1] y extrayendo la raíz de índice y sale

$$x = y^{(n+m):n}$$

Igualemos las dos últimas expresiones de x y se obtiene:

$$\frac{n + m}{n} y = y^{1+(m:n)}$$

de donde simplificando

$$\frac{n + m}{n} = y^{m:n}$$

y de aquí

$$1 + \frac{m}{n} = y^{m:n}$$

De esta última sale

$$y = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \quad \text{de donde} \quad x = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}+1}$$

Como se supone que x e y son racionales, haremos $m = 1$ y así se obtiene el notable resultado

$$\boxed{y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}} \quad . \quad \boxed{x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

solución general, ya que n puede ser cualquier número natural.

Si en particular ponemos $n = 1$, resulta

$$y = 2 \quad , \quad x = 4$$

solución obtenida ya en el primer caso.

Tercer caso.—Como en los casos anteriores escribiremos

$$x \in R^+ \quad , \quad y \in R^+ \quad ; \quad \exists (x, y)? \; \boxed{x^y = y^x} \qquad [1]$$

Para obtener la solución general de [1], la transformamos en la

$$x^{1:x} = y^{1:y} \qquad [1]$$

Consideremos ahora la ecuación $v = u^{1:u}$ [4]. Un fácil estudio analítico previo permite dibujar la gráfica de [4] que aparece en la figura 1.

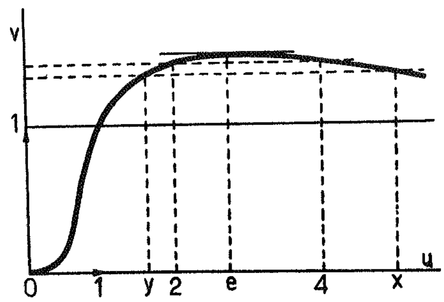

Fig. 1.

Examinando tal curva se reconoce que cualquier paralela al eje u

$$v = k \qquad (k > 1)$$

corta aquélla en dos puntos, tales que si sus abscisas se designan por x e y se cumple la condición [1′] y, por tanto, la [1].

Con tal construcción se reconoce esta propiedad: *Existen infinitos pares de números reales* x *e* y *que cumplen la propiedad conmutativa de la potenciación.*

Uno de tales pares, repetidamente indicado, es el (2, 4) que aparece en dicha figura 1.

De esta figura 1.ª sale claramente que (supuesto $y < x$) es

$$y < e \qquad x > e$$

resultado muy interesante que conviene confrontar con el obtenido en el segundo caso.

Otra obtención de las soluciones de [1] resulta de lo que sigue. Tomemos logaritmos neperianos (que notaremos con log) en [1] y se tiene:

$$y \cdot \log x = x \cdot \log y \qquad \text{de donde} \qquad \frac{\log x}{x} = \frac{\log y}{y}$$

que prueba que los puntos $(x, \log x)$ e $(y, \log y)$ están alineados con el origen.

Dibujemos, pues (fig. 2), la curva $v = \log u$ y cortémosla por cualquier recta

$$v = ku \qquad \left(0 < k < \frac{1}{e}\right)$$

Designemos por x e y las abscisas de esos puntos de intersección y resul-

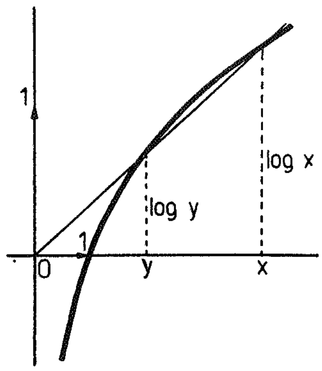

Fig. 2

ta fácilmente una solución (x, y) de [1], conforme se ve invirtiendo el razonamiento anterior.

Con una u otra construcción de las indicadas en la figuras 1 y 2 se obtienen soluciones de [1] que permiten dibujar puntos de la gráfica correspondiente, la que aparece en la figura 3.

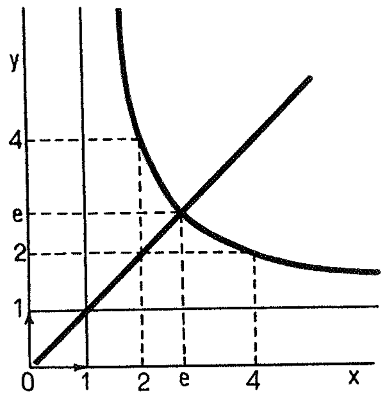

Fig. 3

Es interesante señalar que la curva obtenida (esquemáticamente de forma de paraguas) es reductible en la recta $y = x$, correspondiente a la solución trivial descartada desde un principio, y en una rama curva que admite las asíntotas $x = 1$ e $y = 1$.

Al ser la ecuación [1] simétrica en x e y, la gráfica admite como eje de simetría la bisectriz $x = y$, lo que aparece bien patente en el dibujo.

Notemos también que el notable resultado obtenido en el segundo caso proporciona los puntos racionales de la gráfica de [1].

Y, finalmente, el resultado obtenido en el tercer caso de ser $y < e$, $x > e$ muestra bien claramente que (2, 4), y, por tanto (4, 2), son los únicos puntos *enteros* de la gráfica repetidamente indicada.

Es claro que de ser cierta la propiedad conmutativas de la potenciación, el conjunto de soluciones de [1] hubiera llenado todo el plano cartesiano $x \times y$.