SOBRE LAS ELIPSES, CIRCUNSCRITAS A UN TRIANGULO, DE CENTRO EN LOS EXCENTROS

por

PIETRO FANCIULLI

INTRODUCCIÓN Y RESUMEN

Entre las elipses, circunscritas a un triángulo, de centro un dado punto, es notable la que estudió G. Cesáro [1], la cual tiene por centro el incentro del triángulo, dicha elipse es Ω. En aquella nota se demuestran las relaciones siguientes que ligan los semiejes α, β y el área S de Ω con los radios R y r de los círculos circunscrito e inscrito:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2R \\ \alpha\beta &= 2Rr \\ S &= 2\pi Rr \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En esta nota vamos a demostrar propiedades análogas para las Elip, ses circunscritas a un triángulo ABC, que tienen por centro los centros de los círculos ex inscritos y a que, por análogía con la (Ω), llamamos Elipses (Ω_i), $(i = a, b, c)$.

§ I. *Teorema I*

El área de una elipse (Ω_i) es doble del área de la elipse cuyos semiejes son los radios de los círculos circunscrito y exinscrito correspondiente, esto es:

$$S_i = 2\pi R r_i \qquad (2)$$

o bien, en otros términos:

El producto de los semiejes de la elipse (Ω_i) es igual al producto del diámetro del círculo circunscrito por el radio del correspondiente círculo exinscrito:

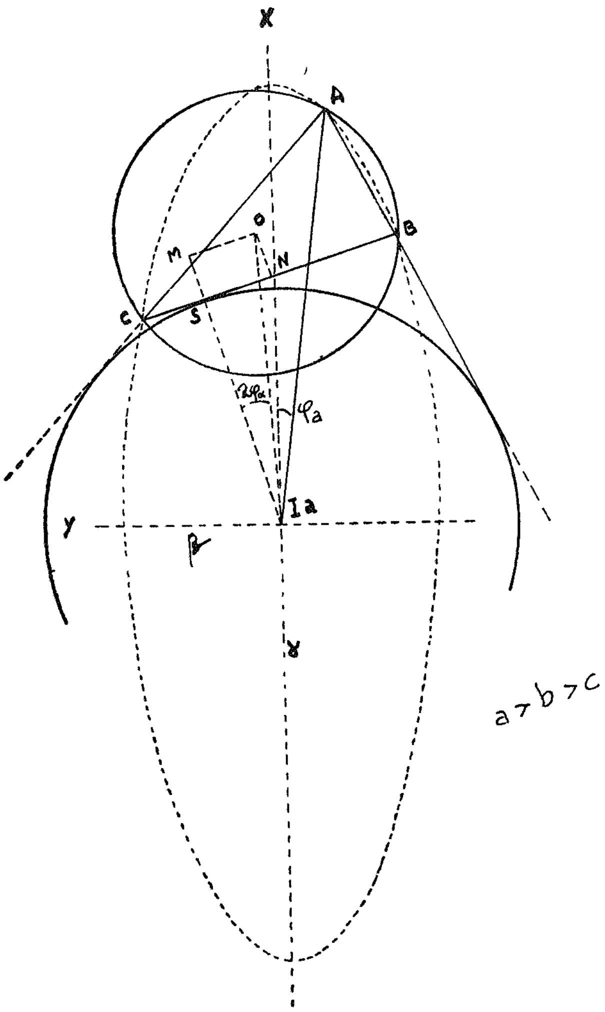
$$\alpha_i \beta_i = 2Rr_i \qquad (3)$$

Consideremos la elipse (Ω_a) de centro I_a, centro del círculo exinscrito correspondiente al lado BC, y tomemos ejes rectangulares con el origen en I_a y la dirección del eje $+x$ coincidente con la bisectriz dirigida hacia el vértice A. Si l_a, l_b, l_c designan las distancias de los vértices del origen, tenemos las coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} A &= (l_a, \quad 0) \\ B &= (l_b \cos C/2, \quad -l_b \operatorname{sen} C/2) \\ C &= (l_c \cos B/2, \quad l_b \operatorname{sen} B/2) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

La ecuación de la elipse es de la forma:

$$Nx^2 + Pxy + My^2 + F = 0 \qquad (5)$$



Por las (4) se obtienen: $F = -\,I_a^2 N$, y

$$\left.\begin{array}{l} M\ \mathrm{sen}^2\ C/2 - P\cos C/2\ \mathrm{sen}\ C/2 + N\,(\cos^2 C/2 - I_a^2/I_b^2) = 0 \\ M\ \mathrm{sen}^2\ B/2 - P\cos B/2\ \mathrm{sen}\ B/2 + N\,(\cos^2 B/2 - I_a^2/I_b^2) = 0 \end{array}\right\}\quad(6)$$

o bien, designando por T el área del triángulo:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{M}{P}\ \mathrm{sen}^2\ C/2 + \dfrac{N}{P}\,(\cos^2 C/2 - I_a^2/I_b^2) = \dfrac{T}{ab} \\[2ex] \dfrac{M}{P}\ \mathrm{sen}^2\ B/2 + \dfrac{N}{P}\,(\cos^2 B/2 - I_a^2/I_c^2) = \dfrac{T}{ac} \end{array}\right\}\quad(7)$$

Sabiendo que

$$I_a^2 = \frac{bcp}{p-a},\quad I_b^2 = \frac{ac\,(p-c)}{p-a},\quad I_c^2 = \frac{ab\,(p-b)}{p-b}$$

se deducen los valores de M/P y N/P, y luego los coeficientes de la ecuación (5), que será:

$$\frac{a}{p}\,x^2 - \frac{2\,(b-c)\,(p-a)}{T}\,xy + \frac{ap-(b-c)^2}{(p-c)\,(p-b)}\,y^2 -$$

$$-\frac{abc}{p-a} = 0 \qquad (8)$$

Ahora, la superficie de una elipse de ecuación (5) es dada por la fórmula

$$S = \frac{2\pi F}{\sqrt{4MN - P^2}}$$

pues, en el caso de la [8], tenemos:

$$S_a = \frac{\dfrac{\pi abc}{(p-a)}}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{p}\cdot\dfrac{ap-(b-c)^2}{(p-b)\,(p-c)}\right) - \dfrac{(b-c)^2\,(p-a)^2}{T^2}}} =$$

$$= \frac{\pi abc}{2\,(p-a)} = \frac{2\pi TR}{(p-a)} = \frac{2\pi R\,(p-a)\,r}{(p-a)} = 2\pi R r_a\,,$$

siendo r_a el radio del círculo exinscrito.

De donde el producto de los semiejes

$$\alpha\beta = 2Rr_a \qquad (9)$$

Teorema II

Los semiejes (α_i, β_i) de la elipse (Ω_i) son iguales a la distancia entre los centros de los círculos circunscrito y exinscrito correspondiente, más o menos el radio del círculo circunscrito, esto es

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_i \\ \beta_i\end{array}\right\} = \overline{\mathrm{OI}}_i \pm \mathrm{R}$$

En la elipse de la ecuación

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

los semiejes son exprimidos por la relación

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = -\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{33}}$$

pues, en nuestro caso:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{(p - a)}{abc} \cdot \left[\frac{ap - (b - c)^2}{(p - b)(p - c)} + \frac{a}{p}\right] =$$

$$= \frac{(p - a)}{abcp\,(p - b)(p - c)} \cdot \left[ap^2 - p\,(b - c)^2 + a\,(p - b)(p - c)\right]$$

Ahora

$$\frac{p - a}{abcp\,(p-b)(p-c)} = \frac{(p - a)^2}{4\mathrm{TRT}^2} = \frac{(p - a)^2}{4\mathrm{TR}\,(p - a)^2{}_a r^2} = \frac{1}{4\mathrm{TR}r_a^2},$$

y por la expresión entre paréntesis:

$$ap^2 - p\,(b - c)^2 + a\,(p - b)(p - c) = abc + p\,(2ap - (b - c)^2 + $$
$$+ a^2 - ab - ac)$$
$$= abc + p\,(a^2 - (b - c)^2)$$
$$= abc + 4p\,(p - b)(p - c)$$
$$= 4\mathrm{TR} + 4\mathrm{T}r_a = 4\mathrm{T}\,(\mathrm{R} + r_a)\,.$$

Luego,

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{4\mathrm{T}\,(\mathrm{R} + r_a)}{4\mathrm{TR}r^2} = \frac{\mathrm{R} + r_a}{\mathrm{R}r^2}$$

Siendo por la (9)

$$\alpha\beta = 2\mathrm{R}r\,,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\mathrm{R} + r_a}{\mathrm{R}r_a^2}\,(2\mathrm{R}r_a)^2 = 4\mathrm{R}\,(\mathrm{R} + r_a),$$

de donde:

$$\left.\begin{aligned}\alpha + \beta &= 2\sqrt{R\,(R + 2r)} = 2.\overline{OI_a}\\ \alpha - \beta &= 2R\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

o bien, designando por ρ la distancia $\overline{OI_a}$,

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \rho_a \pm R \qquad (10')$$

En general, por las elipses (Ω_i):

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i - \beta_i &= 2R\\ \alpha_i + \beta_i &= 2 \cdot \overline{OI_i} = 2\rho_i\\ \alpha_i\ \beta_i &= 2Rr_i\ (i = a,\, b,\, c)\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Corolarios.—La (9) puede escribirse

$$\frac{1}{S_a} = \frac{2(p - a)}{\pi abc}$$

y las análogas

$$\frac{1}{S_b} = \frac{2(p - b)}{\pi abc} \quad , \quad \frac{1}{S_c} = \frac{2(p - c)}{\pi abc}$$

Sumando

$$\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_b} + \frac{1}{S_c} = \frac{2(p - a + p - b + p - c)}{\pi abc} = \frac{2p}{\pi abc}$$

$$= \frac{1}{2\pi Rr} = \frac{1}{S}, \text{ por la (1).}$$

Entonces el inverso del área de la elipse (Ω) es igual a la suma de los inversos de las áreas de las elipses (Ω_i).

Por las (11) tenemos:

$$R = \frac{\alpha_i - \beta_i}{2} \quad , \quad r_i = \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_i - \beta_i}$$

luego todos los triángulos inscritos en una elipse (Ω_i), cuyo ex centro I_i coincide con el centro de la elipse, tienen mismos radios por los círculos ex inscritos y circunscrito. El lugar de los centros de los círculos circunscritos a estos triángulos es una circunferencia concéntrica a la elipse (Ω_i) y que tiene por radio $(\alpha_i + \beta_i) / 2$.

En efecto, si «x» y «y» son las coordenadas del lugar, referidas a ejes rectangulares con el origen en I_i, siendo $\overline{OI_i}^2 — R(R + 2r_i)$, y eliminando R y r_i por las (11), tenemos:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4} (\alpha_i + \beta_i)^2$$

de donde el enunciado.

§ 2. *Orientación de la elipse* (Ω_i)

Consideremos la elipse (Ω_a), pudiéndose sus conclusiones generalizar y extender a las otras (Ω_i).

Si φ_a es el ángulo que un eje de (Ω_a) hace con la bisectriz AI_a (eje de referencia en la ecuación (8)), será:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_a = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-2(b-c)(p-a)}{T \cdot \left[a/p - \dfrac{ap - (b-c)^2}{(p-b)(p-c)}\right]}$$

$$= \frac{-2(b-c) \cdot T}{a(p-b)(p-c) - ap^2 + p(b-c)^2} = \frac{-2(b-c) \cdot T}{-abc(\cos B + \cos C + 1)} =$$

$$= \frac{b-c}{2R(\cos B + \cos C + 1)} = \frac{\sin B - \sin C}{\cos B + \cos C + 1}$$

Esta fórmula permite la construcción del ángulo φ_a y conduce al siguiente teorema:

El ángulo φ_a que un eje de la elipse (Ω_a) hace con la bisectriz del ángulo A, es la mitad del ángulo que la recta OI_a (que junta los centros de los círculos circunscritos y ex inscrito) hace con la altura h_a, o bien con el radio correspondiente del círculo ex inscrito.

En efecto, pues

$$\cos B + \cos C - \cos A = \frac{r_a}{R} - 1 \; (^*)$$

la (12) puede escribirse:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_a = \frac{(b-c)/2}{r_a + R \cos A}$$

Ahora, en el triángulo $\widehat{OI_aM}$, tenemos

$$\operatorname{tg} \widehat{OI_aM} = \frac{OM}{I_aM} = \frac{CN - CS}{I_aS + SM}$$

pero,

$$CN = a/2 \quad , \quad CS = p - b \quad , \quad I_aS = r_a \quad y \quad SM = ON = R \cos A$$

luego

$$\operatorname{tg} \widehat{OI_aM} = \frac{a/2 - (p - b)}{r_a + R \cos A} = \frac{(b - c)/2}{r_a + R \cos A}$$

de donde

$$2\varphi_a = \widehat{OIM} \quad , \quad \varphi_a = \frac{\widehat{OI_aM}}{2}$$

Pues φ_a es la mitad del ángulo $\widehat{OI_aM}$, y para obtener la dirección axial de «x» es bastante conducir por I_a una recta que haga con la bisectriz del ángulo A, el ángulo $(\widehat{OI_aM})/2$.

NOTA BIBLIOGRAFICA

(1) G. Cesáro: *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, Bruxelles* (5), 16, (1930), págs. 15-25; ídem (5), 17, (1931), págs. 1126-1130

(*) Demostración de esta relación:

$$\frac{r_a}{R} - 1 = \frac{T}{(p - a)R} - 1 = \frac{4T^2}{(p - a)abc} - 1 =$$

$$= \frac{4p(p - b)(p - c)}{abc} - 1 = \frac{4p(p - b)(p - c) - abc}{abc} =$$

$$\frac{a^3 - ab^2 - ac^2 + a^2b + a^2c - b^3 + b^2c - c^3 + bc^2}{2abc} =$$

$$= \frac{b(a^2 - b^2 + c^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) - a(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc} =$$

$$= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$= \cos B + \cos C - \cos A.$$