DERIVACION

por

E. G-Rodeja F.

Resumen:

Se demuestra que: Una derivación de un cuerpo K con valores en un cuerpo K′ (de característica distinta de dos) puede ser definida como una aplicación que cumple las condiciones:

$$(1)\ D(x+y) = D(x) + D(y),\quad (2'')\ xD(x^{-1}) + x^{-1} D(x) = 0$$

* * *

Definición:

Sea S un anillo y R un subanillo de S. Una aplicación D de R en S se llama una derivación de R (con valores en S) si, para todo x, y en R, D satisface las siguientes condiciones:

$$(1)\qquad D(x+y) = D(x) + D(y),$$
$$(2)\qquad D(xy) = xD(y) + yD(x)\quad [1]$$

Si se sustituyen los anillos S y *R, por los cuerpos K′* y *K (de característica distinta de dos), la condición* (2) *es equivalente a la*

$$(2')\qquad D(x^2) = 2xD(x),$$

para todo x *en K.*

En efecto (2′) es consecuencia inmediata de (2) para $y = x$.

De (1) y (2′) se deduce:

$$2D(xy) = D[(x+y)^2 - x^2 - y^2] = D[(x+y)^2] - D(x^2) - D(y^2) =$$
$$= 2(x+y)\,D(x+y) - 2xD(x) - 2yD(y) = 2[xD(y) + yD(x)],$$

y, por tanto (2).

---

[1] Zariski, O Commutative Algebra Vol I. pág. 120 Se supone, en todos los casos, la propiedad conmutativa de la multiplicación

La condición:

$$(2'') \qquad x\mathrm{D}(x^{-1}) + x^{-1}\,\mathrm{D}(x) = 0$$

es equivalente a la (2').

Siendo 1 la unidad del cuerpo de (2) se deduce: $\mathrm{D}(1) = \mathrm{D}(1^2) = 2\mathrm{D}(1)$, por tanto, $\mathrm{D}(1) = 0$. Análogamente de (2''), se obtiene, para $x = 1$. $\mathrm{D}(1) + \mathrm{D}(1) = 0$, por tanto, $\mathrm{D}(1) = 0$.

(2'') es consecuencia inmediata de (2) para $y = x^{-1}$. De la igualdad

$$x^2 = x - [x^{-1} + (1 - x)^{-1}]^{-1}$$

utilizando (1) y la relación (2'') en la forma $\mathrm{D}(x^{-1}) = - x^{-2}\,\mathrm{D}(x)$, se obtiene derivando x^2 la relación (2'):

$$\mathrm{D}(x^2) = \left\{ 1 + [x^{-1} + (1 - x)^{-1}]^{-2}\,[- x^{-2} + (1 - x)^{-2}] \right\} \mathrm{D}(x) = 2x\mathrm{D}(x)$$

Observatorio de Santiago