HACIA UNA SISTEMATIZACION DE LA MATEMATICA FINANCIERA

Por Luciano Fernández Penedo

En los más diversos problemas de la llamada Matemática Financiera y Actuarial se puede observar una fundamentación común, que permite establecer determinados postulados sobre los que es posible edificar un estudio sistemático de tales problemas.

En este sentido ha realizado Alfred Loewy una axiomática de las fórmulas del interés simple y de la capitalización a interés compuesto; deduciendo cada una de ellas de cinco postulados (1). Posteriormente hemos publicado nosotros un breve estudio sobre la capitalización generalizada como grupo continuo de transformaciones que depende de un parámetro (2).

Siguiendo esta directriz, el presente trabajo pretende realizar una completa sistematización de la abundante casuística que presenta el clásico cálculo financiero, al mismo tiempo que incluye el problema de la depreciación monetaria, elemento perturbador en la clásica exposición de las matemáticas comerciales.

Hasta ahora se ha admitido en toda clase de problemas económicos, mercantiles o financieros, tanto teóricos como prácticos, de una forma implícita, que el valor de la moneda es constante: no se deprecia, ni se revaloriza, tiene siempre el mismo poder adquisitivo. A lo sumo, se le atribuyen pequeñas variaciones, con marcado carácter oscilante, que dan origen a los clásicos estudios de cursos y cotizaciones, impuestos siempre, de forma más o menos directa, por la aplicación de la ley de oferta y demanda.

En la realidad, desaparecido el patrón oro, y habiendo adquirido el crédito y la renta nacional importancia decisiva, e introduciéndose nuevos factores en la economía de más o menos difícil ponderación, las varia-

---

(1) (Axiomatische Begrundung der Zinstheorie). Jahresbericht der Deutschen Mathematiker. Vereinningung, tomo XXVIII.

(2) *Gaceta Matemática*, 1.ª serie, tomo III, núm. 2.

ciones de una moneda sobrepasan en mucho a las determinadas por los factores financieros tradicionales: como la acumulación de intereses en régimen de capitalización, rentabilidad de valores, etc.. .

De esta forma, los problemas financieros clásicos, apoyados en el axioma de la igualdad de «valores actuales» de capitales con sentidos opuestos y vencimientos distintos, susceptibles de producir intereses, como única variación digna de tenerse en cuenta, quedan desde el punto de vista de la realidad económica presente, reducidos a simples curiosidades históricas, al introducir elementos modificativos de capitales, en consonancia con sus valores adquisitivos, impuestos por una insoslayable realidad, y que es su verdadera finalidad y su razón de ser.

No obstante, todavía en los problemas de ahorro y previsión, en las capitalizaciones y amortizaciones a largo plazo, en las inversiones de capital a interés fijo; y en general, en todo problema económico planteado sobre un largo intervalo de tiempo, se sigue operando con el falso sentido de la invariabilidad del valor adquisitivo de la moneda. La depreciación de capitales en dinero, o su posible revalorización, no suele precisarse cuantitativamente en su verdadero significado, pese a su importancia fundamental. Mientras que, un poco por rutina, se siguen aquilatando con exceso, tasas de interés, porcentajes de beneficios, más ficticios que reales, de mucha menor influencia financiera. Hasta el punto que, con un criterio ponderativo, pudiera prescindirse de todos los factores modificativos de capital, ante la importancia definitiva impuesta por una depreciación monetaria.

Si los problemas económicos a que nos venimos refiriendo, han de estudiarse de forma real, es preciso prescindir de la invariabilidad adquisitiva de la moneda en el transcurso del tiempo: solamente tiene sentido hablar de la moneda cuando se le asocia un instante.

De esta manera, si suponemos un capital x, asociado a un instante t, y representamos por x' el valor de dicho capital en el instante t', tendremos que admitir que x' pueda ser expresado inequívocamente cuando se conozca los valores de x, t y t'; o sea, que exista una función

$$x' = f(x; t, t')$$

que define una transformación sobre una variable, en la cual t y t' pueden considerarse como parámetros.

En resumen, se pretende estudiar de forma sistemática los distintos problemas de la clásica matemática financiera, incluyendo el factor modificativo impuesto por la depreciación monetaria, por medio de un grupo continuo de transformaciones dependiente de dos parámetros esenciales; isomorfo como *a fortiori* tiene que suceder (1) con el grupo de las sustituciones lineales sobre una recta. Este grupo, que llamaremos «Grupo Financiero», realizará una sistematización de los más diversos problemas, permitiendo considerar cada uno como una simple particularización en las condiciones iniciales.

---

(1) BIANCHI: *Teoria dei Gruppi Continui Finiti di Transformazioni.*

Sea, pues, el capital x' en el instante t', que procede del capital x, considerado en el instante t; es decir, supongamos la existencia de la función

$$x' = f(x; t, t').$$

Sobre la que haremos las siguientes hipótesis:

1.ª Será función analítica respecto a x y a los parámetros t y t'.

2.ª Si t' toma el valor t, x' toma el valor x; esto es, se obtiene la identidad cuando los parámetros son iguales:

$$x = f(x; t, t).$$

Hipótesis que resulta evidente desde el punto de vista financiero.

3.ª Si se consideran tres instantes, por ejemplo: $t < t' < t''$, en los que el capital toma los valores x, x', x'' respectivamente, se puede considerar x'' transformado de x desde el instante t al t'', o también como transformado de x' al pasar del instante t' al t''. Esto es, se cumple la relación funcional:

$$x'' = f(x; t, t'') = f(x': t', t'')$$

o su equivalente: $f(x; t, t'') = f[f(x; t, t'); t', t'']$. Lo cual significa que la serie de transformaciones, doblemente infinita, definida por $f(x; t, t')$, constituye un grupo sobre una variable, dependiente de los dos parámetros esenciales t y t'. Esta tercera hipótesis resulta también evidente en la clase de problemas que tratamos de estudiar.

Caso particular.—Un caso particular, pero fundamental en toda teoría financiera, se obtiene al imponer una nueva condición, con lo cual se obtendrá un subgrupo del proceso económico anterior. Esta condición la expresaremos de la forma siguiente:

4.ª Si en el instante t consideramos dos capitales de valores adquisitivos x y x_1, los cuales, en el instante t' toman respectivamente los valores x' y x'_1, es lógico suponer que, si ambos están sometidos al mismo régimen de capitalización, la suma $x + x_1$, en el instante t, se transforma en la suma $x' + x'_1$ en el instante t'. Así resulta la relación funcional siguiente:

$$f(x + x_1; t, t') = f(x; t, t') + f(x_1; t, t').$$

Esta relación, en virtud de la continuidad de la función f respecto a x, admite la solución $xf(1; t, t')$ para cualquier valor real de x. Llamando a $f(1; t, t') = a(t, t')$, la transformación queda reducida a

$$x' = a(t, t')x, \qquad [1]$$

subgrupo de las homotecias, que depende de un solo parámetro esencial a que toma el valor 1 cuando t' toma el valor t; esto es, $a(t, t) = 1$.

Consideremos tres instantes, t, t' y t''; se tendrá, pues,

$$x'' = x'a(t', t''),$$

o también

$$x'' = xa(t, t'').$$

De donde, sustituyendo x' por $a(t, t')x$, resulta la siguiente relación funcional de composición de parámetros:

$$a(t, t'') = a(t, t') \cdot a(t', t''),$$

en la cual, dando a t el valor cero, resulta:

$$a(t', t'') = \frac{\mathrm{A}(t'')}{\mathrm{A}(t')},$$

representando por $\mathrm{A}(t)$ la función $a(0, t)$.

Luego el subgrupo [1] puede escribirse

$$x' = x \frac{\mathrm{A}(t')}{\mathrm{A}(t)},$$

siendo $\mathrm{A}(t)$ una función arbitraria pero analítica de la variable t.

La transformación inifinitesimal de [1] se obtiene dando a t' el valor $t + \delta t$ resultando

$$x + \delta x = x \cdot a(t, t + \delta t) = x[1 + \alpha(t)\delta t],$$

despreciando los infinitésimos de orden superior al primero y designando por $\alpha(t)$ la derivada

$$\frac{\partial a(t, t')}{\partial t'}$$

particularizada para $t' = t$, esto es:

$$\alpha(t) = \frac{\mathrm{A}'(t)}{\mathrm{A}(t)}.$$

Y al integrar esta ecuación diferencial resulta:

$$\mathrm{A}(t) = \mathrm{A}(\mathrm{O})e^{\int_o^t \alpha\,(t)dt}$$

A esta función $A(t)$ por su significado, le llamaremos factor de capitalización desde el instante O al instante t, y a $\int_o^t \alpha(t)dt$ factor logarítmico para los mismos instantes. El régimen de capitalización queda definido por el conocimiento de la función $\alpha(t)$. La transformación [1] puede escribirse también así:

$$x' = x \cdot e^{\int_{t}^{t'} \alpha(t)dt}$$

La función $\alpha(t)$ puede suponerse descompuesta en dos sumandos, velocidades respectivas de capitalización y depreciación: $\alpha(t) = \delta(t) + \gamma(t)$.

La anterior transformación puede ser escrita así:

$$x' \cdot e^{\int_{t'}^{0} \alpha(t)dt} = x \cdot e^{\int_{t}^{0} \alpha(t)dt} = \mathrm{K}$$

donde K es una constante, cuyo significado es el valor actual (instante O) del capital x que vence o ha vencido en el instante t.

Así, por ejemplo, en un régimen de moneda estable $\gamma(t) = 0$, y la velocidad de capitalización es constante y positiva, pudiendo darle la forma $\delta(t) = \log(1 + i)$, donde i es la tasa unitaria de interés, resulta para K el siguiente valor:

$$\mathrm{K} = \frac{x}{(1 + i)^t}$$

valor actual a interés compuesto.

También en régimen de moneda estable, si

$$\delta(t) = \frac{i}{1 + it},$$

resulta para valor de K

$$\mathrm{K} = \frac{x}{1 + it},$$

valor actual de un capital a interés simple.

Por último, la fórmula real de capitalización, en el caso de existir una depreciación de velocidad instantánea $\gamma(t)$ tomaría la forma:

$$x' = x(1 + i)^{t' - t} \cdot e^{\int_{t}^{t'} \gamma(t)dt}$$

equivalente a la del interés compuesto en régimen de moneda estable.

Aplicación práctica.—Como aplicación práctica podemos determinar la velocidad de depreciación de la peseta desde 1940 a 1955, tomando su valor adquisitivo deducido de los índices ponderados de precios al por mayor, según el anuario estadístico de España de 1956.

Supongamos que el capital no produzca intereses, o sea que $i = 0$, y designando por $\Gamma(t)$ una función primitiva de $\gamma(t)$, la transformación [1] puede ser escrita

$$\frac{x}{x'} = e^{\Gamma(t) - \Gamma(t')}$$

Tomando como base 100 pesetas del año 1913, y considerando $\Gamma(1913) = 0$, se tiene $\dfrac{x'}{100} = e^{\Gamma(t')}$, de donde resulta la serie de valores siguientes:

$$\left.\begin{array}{r}
2{,}888 = e^{\Gamma(1940)} \\
3{,}145 = e^{\Gamma(1941)} \\
3{,}754 = e^{\Gamma(1942)} \\
4{,}191 = e^{\Gamma(1943)} \\
4{,}508 = e^{\Gamma(1944)} \\
5{,}000 = e^{\Gamma(1945)} \\
6{,}004 = e^{\Gamma(1946)} \\
7{,}040 = e^{\Gamma(1947)} \\
7{,}541 = e^{\Gamma(1948)} \\
8{,}069 = e^{\Gamma(1949)} \\
9{,}522 = e^{\Gamma(1950)} \\
12{,}231 = e^{\Gamma(1951)} \\
12{,}335 = e^{\Gamma(1952)} \\
13{,}213 = e^{\Gamma(1953)} \\
13{,}278 = e^{\mathrm{I}(1954)} \\
13{,}795 = e^{\Gamma(1955)}
\end{array}\right\}
\begin{array}{c}\text{Tomando logaritmos} \\ \text{neperianos}\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
\Gamma(1940) = 1{,}06056 \\
\Gamma(1941) = 1{,}22935 \\
\Gamma(1942) = 1{,}32282 \\
\Gamma(1943) = 1{,}43294 \\
\Gamma(1944) = 1{,}50570 \\
\Gamma(1945) = 1{,}61004 \\
\Gamma(1946) = 1{,}79242 \\
\Gamma(1947) = 1{,}95160 \\
\Gamma(1948) = 1{,}96035 \\
\Gamma(1949) = 2{,}02035 \\
\Gamma(1950) = 2{,}08803 \\
\Gamma(1951) = 2{,}25360 \\
\Gamma(1952) = 2{,}50407 \\
\Gamma(1953) = 2{,}51244 \\
\Gamma(1954) = 2{,}58611 \\
\Gamma(1955) = 2{,}62430
\end{array}\right.$$

De los valores de $\Gamma(t)$ se desprende que puede tomarse, en el período considerado, una función lineal $\Gamma(t) = At + B$, de la cual interesa solamente conocer A, puesto que el exponente $\Gamma(t) - \Gamma(t') = - A(t' - t)$ es independiente de B.

Ajustando por mínimos cuadrados resulta el sistema:

$$A \cdot \sum_{j=1}^{n} t^2_j + B \sum_{j=1}^{n} t_j = -\sum_{j=1}^{n} t_j\Gamma_j$$

$$A \sum_{j=1}^{n} t_j + B \cdot n = -\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j$$

del cual se deduce para

$$-A = \frac{n \sum_1^n t_j\Gamma_j - \sum_1^n \Gamma_j \sum_1^n t_j}{n \sum_1^n t^2_j - \left[\sum_1^n t_j\right]^2}$$

Para simplificar, tomemos como instante 0 el final del año 1913. Entonces, los finales de los años 1940, 1941,... 1956, serán los instantes respectivos 27, 28 ... 42; y así:

$n = 16$

$\sum_{j=1}^{16} t_j = 552$ $\qquad \sum_{j=1}^{16} \Gamma(t_j) \sum_{j=1}^{16} t_j = 19.119{,}3416$

$\sum_{j=1}^{16} t^2_j = 19.385$ $\qquad \sum_{j=1}^{16} t_j\Gamma(t_j) = 1.232{,}8319$

$\sum_{j=1}^{16} \Gamma(t_j) = 31{,}0033$ $\qquad -A = \dfrac{605{,}9688}{5.456} = 0{,}11106 \ldots \cong 0{,}111.$

Luego $\Gamma(t) = -0{,}111t + B$ y, por tanto, la fórmula del interés compuesto, al tener en cuenta la depreciación de la moneda entre los años 1940 y 1956, sería:

$$x' = x(1 + i)^{t'-t} \cdot e^{-0{,}111(t'-t)}$$

Válida para el período consideradl, pero resultará solamente una aproximación, siempre incierta, si se tratase de extrapolar fuera de este período.

Como justificación de las afirmaciones hechas en las introducción podemos encontrar el tiempo que necesita un capital colocado en una libreta de ahorro al tipo de interés normal del 3 por 100 para que pierda la mitad de su valor adquisitivo

$$1 = 2 \times 1{,}03^{t'-t} \times e^{-0{,}111(t'-t)}$$

y al tomar logaritmos:

$$0 = \log 2 + (t' - t)\ (\log 1{,}03 - 0{,}111 \log e)$$

de donde:

$$t' - t = \frac{0{,}30103}{0{,}03537} = 8 \text{ años y medio.}$$

CASO GENERAL

En el caso general, se cumplen solamente las condiciones 1.ª, 2.ª y 3.ª, no cumpliéndose la condición aditiva establecida en el postulado 4.º, por estar sometidos los capitales a régimenes distintos de capitalización y a incrementos o disminuciones determinados por otros factores distintos de la depreciación o revalorización monetaria, por lo tanto, la transformación general

$$x' = f(x;\ t,\ t')$$

define un grupo continuo dependiente de dos parámetros, sobre la variable x, que representará un bien económico cualquiera. Este grupo, semejante con el grupo de las sustituciones lineales $y' = ay + b$, se reducirá a él por medio de la transformación

$$y = x \ , \quad a = a(t, t') \quad , \quad b = b(t, t')$$

quedando, por lo tanto, de la forma

$$x' = xa(t, t') + b(t, t')$$

teniendo la identidad para $t = t'$, esto es: $a(t, t) = 1 \quad ; \quad b(t, t) = 0$.

Considerando tres instantes t, t', t'', resulta:

$$x'' = xa(t, t'') + b(t, t'')$$

$$x'' = x'a(t', t'') + b(t, t'')$$

$$x' = xa(t, t') + b(t, t')$$

Sustituyendo se obtiene las fórmulas de composición dè los parámetros

$$a(t, t'') = a(t, t') \cdot a(t', t'')$$

$$b(t, t'') = b(t, t') \cdot a(t', t'') + b(t', t'')$$

En donde, haciendo $t = 0$, y designando por $A(t) = a(0, t)$ y por $B(t) = b(0, t)$ resulta:

$$a(t', t'') = \frac{A(t'')}{A(t')} \quad \text{y} \quad b(t', t'') = B(t'') - B(t') \frac{A(t'')}{A(t')}$$

Por tanto, la transformación del grupo puede escribirse:

$$x' = x \cdot \frac{A(t')}{A(t)} + B(t') - B(t)\,\frac{A(t')}{A(t)} \qquad [2]$$

Transformación infinitesimal del grupo.—Para hallar la transformación infinitesimal del grupo hagamos $t' = t + \delta t$, obteniendo así:

$$x + \delta x = x\,\frac{A(t+\delta t)}{A(t)} + B(t+\delta t) - B(t)\,\frac{A(t+\delta t)}{A(t)}$$

Desarrollando en serie y prescindiendo de los infinitésimos de orden superior al primero, queda

$$\delta x = [x\alpha(t) + \beta(t)]\,\delta t$$

Donde

$$\alpha(t) = \left[\frac{\partial a(t, t')}{\partial t'}\right]_{t=t'} = \frac{A'(t)}{A(t)} \quad \text{y} \quad \beta(t) = \left[\frac{\partial b(t, t')}{\partial t'}\right]_{t'=t} = B'(t) + $$
$$+ B(t) \cdot \alpha(t)$$

obteniendo así las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$A'(t) = \alpha(t)A(t)$$
$$B'(t) = \alpha(t)B(t) + \beta(t)$$

La integración de ambas ecuaciones diferenciales nos permite determinar las funciones $A(t)$ y $B(t)$ si conocemos $\alpha(t)$ y $\beta(t)$. Por tanto, un proceso financiero cualquiera quedará determinado por el conocimiento de las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$. cuya interpretación financiera puede ser la siguiente: según vimos en el caso particular anterior $x \cdot \alpha(t)\delta t$, es la capitalización de x en el intervalo infinitesimal $(t, t + \delta t)$, sujeto a intereses y despreciación, y $\beta(t) \cdot \delta t$ sería una cuota positiva (aportación) o negativa que el bien económico x experimentaría en el mismo intervalo, expresada en moneda correspondiente al instante t, y que llamaremos, consecuentemente, cuota instantánea en el instante t.

Al integrar las anteriores ecuaciones diferenciales se obtiene:

$$A(t) = e^{\int_o^t \alpha(\tau)d\tau}$$

$$B(t) = e^{\int_o^t \alpha(\tau)d\tau} \int_o^t \beta(\tau)e^{\int_\tau^o \alpha(t)dt}\,d\tau$$

y, por tanto, la transformación finita [2] puede ser escrita así:

$$x' = xe^{\int_t^{t'} \alpha(\tau)d\tau} + e^{\int_o^{t'} \alpha(\tau)d\tau} \int_t^{t'} \beta(\tau) e^{\int_\tau^o \alpha(t)dt} d\tau. \qquad [3]$$

Podría considerarse el otro subgrupo semejante al de las traslaciones lineales, es decir,

$$x' = x + b(t, t')$$

donde $b(t, t') = \mathrm{B}(t') - \mathrm{B}(t)$, siendo $\mathrm{B}(t)$ solución de la ecuación diferencial $\mathrm{B}'(t) = \beta(t)$. Sería un proceso financiero donde x no está sujeto a capitalización ni depreciación; y solamente su variabilidad en función del tiempo, está determinada por los incrementos o cuotas instantáneas $\beta(t)$. Este subgrupo, pues, desde nuetro punto de vista, carece de importancia.

Por último, la transformación [2] puede ser escrita

$$\frac{x' - \mathrm{B}(t')}{\mathrm{A}(t')} = \frac{x - \mathrm{B}(t)}{\mathrm{A}(t)} = \mathrm{K}$$

que indica el valor constante de los cocientes anteriores, donde K representa el valor del bien económico x en el instante $t = 0$, puesto que $\mathrm{A}(0) = 1$ y $\mathrm{B}(0) = 0$.

APLICACIONES

Rentas en general.—Si queremos constituir un cierto capital por medio de las cuotas instantáneoas definidas por la función $\beta(t)$, bastará imponer la condición inicial $\mathrm{K} = 0$, esto es, que el capital considerado inicialmente sea nulo, resultando:

$$x - \mathrm{B}(t) = 0$$

O sea, sustituyendo $\mathrm{B}(t)$ por su valor

$$x = e^{\int_o^t \alpha(\tau)d\tau} \int_o^t \beta(\tau) e^{\int_\tau^o \alpha(t)dt} d\tau$$

expresión bien conocida del capital x formado en el intervalo (0, t).

Amortizaciones.—Si se quiere amortizar un capital K con las cuotas instantáneas dadas por $\beta(t)$, la deuda residual en el instante t será el valor de x

$$x = \mathrm{K}\mathrm{A}(t) + \mathrm{B}(t)$$

O sea, sustituyendo $\mathrm{A}(t)$ y $\mathrm{B}(t)$ por sus valores,

$$x = \mathrm{K}e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau} + e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau} \int_0^t \beta(\tau)e^{\int_\tau^0 \alpha(t)dt} d\tau$$

El intervalo que dura la amortización T, se obtendría haciendo nula la deuda residual para $t = \mathrm{T}$

$$0 = \mathrm{K}\mathrm{A}(\mathrm{T}) + \mathrm{B}(\mathrm{T})$$

y sustituyendo $\mathrm{A}(\mathrm{T})$ y $\mathrm{B}(\mathrm{T})$ por sus valores y simplificando, resulta

$$\mathrm{K} = \int_{\mathrm{T}}^0 \beta(t)e^{\int_t^0 \alpha(\tau)d\tau} dt$$

Una particularización interesante resulta al suponer que las dos funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ se reduce a constantes α_1 y β_1; entonces la transformación [3] queda de la forma

$$x' = x \cdot e^{\alpha_1(t' - t)} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left[1 - e^{\alpha_1(t' - t)}\right] \qquad [4]$$

que solamente depende de un parámetro esencial $\tau = t' - t$, intervalo desde el momento en que se considera a x, hasta el instante en que se transforma en x'. La anterior transformación puede ser escrita

$$\frac{x' + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}}{e^{\alpha_1\tau}} = \frac{x + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}}{1} = \mathrm{K}$$

resultando, pues, para $\mathrm{A}(t') = e^{\alpha_1\tau}$ y para $\mathrm{B}(t') = -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$.

Si hacemos el cambio de variable

$$y' = \log\left(x' + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)$$

$$y = \log\left(x + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)$$

$$\mathrm{T} = \alpha_1\tau$$

resulta nuestro grupo [4] semejante al subgrupo de las traslaciones libeales $y' = y + T$.

Si no existiese depreciación, α_1 tomaría la forma log $(1 + i)$ y dando a β_1 al mismo tiempo el valor constante $-C \dfrac{\alpha_1}{i}$ resultará para [4]

$$x' = x(1+i)^{\tau} + C\frac{1-(1+i)^{\tau}}{i}$$

que en la hipótesis de las rentas, o sea cuando $x = 0$ nos da $x' = (-C) \,.\, S_{\overline{\tau}|\,i}$ y en las de las amortizaciones, bien la deuda residual $x' = (1+i)^{\tau} - CS_{\overline{\tau}|\,i}$ o la cuota anual al suponer el instante final del proceso $\tau = n \quad x' = 0 \quad C = x\, a_{\overline{n}|\,i}$

En la hipótesis de la amortización, la diferencia $K - x = y$ resulta ser el capital amortizado en el instante t; por tanto:

$$y = K[1 - A(t)] - B(t)$$

o también

$$\frac{y' + B(t')}{1 - A(t')} = \frac{y + B(t)}{1 - A(t)}$$

transformación finita de un grupo sobre la variable y dependiente también de dos parámetros t y t'.

Significado de un grupo paramétrico.—De la ley de composición de los parámetros

$$a(t, t'') = a(t. t') \cdot a(t', t'')$$

$$b(t, t'') = b(t, t') \cdot a(t', t'') + b(t', t'')$$

se deduce un grupo paramétrico tomando como variables $\xi' = a(t, t'')$; $\xi = a(t,t')$; $\eta' = b(t, t'')$; $\eta = b(t, t')$, cuya interpretación financiera es inmediata: ξ es el valor adquirido por la moneda del instante t considerada en el instante t', afectada ,por lo tanto, por capitalización y depreciación desde el instante t al t'; y η es el valor alcanzado por las aportaciones de capital entre los mismos instantes.

Tenemos, pues, el grupo sobre dos variables

$$\xi' = a(t', t'')\xi$$

$$\eta' = a(t', t'')\eta + b(t', t'')$$

Sumando o restando, según el caso, nos reproduce el grupo sobre la variable $x = \xi \pm \eta$

$$x' = a(t', t'')x + b(t', t'')$$

del que se ha partido; estando de acuerdo, como era de esperar, el significado de la variable x con la interpretación dada a las variables ξ y η.

Impongamos a estas transformaciones la condición inicial siguiente: para $t' = 0$, las variables toman los valores: $\xi = \mathrm{K}$; $\eta = 0$; $x = \mathrm{K}$, y, por tanto, para cualquier instante posterior t,

$$\xi_t = \mathrm{A}(t)\mathrm{K}$$

$$\eta_t = \mathrm{B}(t)$$

$$x_t = \mathrm{A}(t)\mathrm{K} - \mathrm{B}(t)$$

Tendremos así, en el instante t, el valor ξ_t de un activo degradable, moneda o un bien económico cualquiera; el valor η_t del montante en ese instante formado por las cuotas instantáneas destinadas a compensar la depreciación que tendrá signo opuesto al anterior; por último, x_t, será el valor de segunda mano.

Si la vida útil la designamos por T, el valor de deshecho será $\mathrm{A(T)K} - \mathrm{B(T)} = x_{\mathrm{T}}$.

El otro grupo paramátrico, recíproco, como es sabido, del anterior, será:

$$\xi'_1 = \xi_1 a(t, t')$$

$$\eta'_1 = \xi_1 b(t, t') + \eta_1$$

Al dividir la segunda por la primera resulta

$$\frac{\eta'_1}{\xi'_1} = \frac{b(t, t')}{a(t, t')} + \frac{\eta_1}{\xi_1 a(t, t')}$$

Teniendo en cuenta que

$$a(t, t') = \frac{1}{a(t', t)}$$

puede ser escrito así:

$$\frac{\eta'_1}{\xi'_1} = \left[\frac{\eta_1}{\xi_1} + b(t, t')\right] a(t', t)$$

Dando idéntica interpretación a la variable ξ_1 tendremos para $\dfrac{\eta'_1}{\xi'_1}$ la siguiente interpretación: es el valor actual, en el instante t, de las aportaciones de capital efectuadas desde t a t''. Para $\frac{\eta_1}{\xi_1}$ será también interpretada como valor actual (instante t') de las aportaciones efectuadas en el intervalo t' a t''.

Caso de imposiciones discretas

En los problemas de carácter práctico las aportaciones o cuotas de capital suelen efectuarse de una sola vez, al final o principio de ciertos períodos (vencimientos de las cuotas). Esto es, las aportaciones no son instantáneas como hemos supuesto hasta ahora, sino expresables por una función de t, $Q(t)$ que es nula, salvo para $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_h, \ldots$ instantes de los vencimientos, en que precisamente toma los valores $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_h, \ldots$ importe de las respectivas cuotas.

En este caso, la transformación [2] debe ser estudiada solamente en los instantes $t_1, t_2, t_3 \ldots, t_h, \ldots$ De esta forma, se tiene:

$$x_{h+1} = x_h \frac{A(t_{h+1})}{A(t_h)} + B(t_{h+1}) - B(t_h) \frac{A(t_{h+1})}{A(t_h)}$$

de donde, la aportación desde el instante t_h al t_{h+1} será

$$Q(t_{h+1}) = B(t_{h+1}) - B(t_h) \frac{A(t_{h+1})}{A(t_h)} \qquad [5]$$

que puede ser escrita tambien así:

$$\frac{B(t_{h+1})}{A(t_{h+1})} - \frac{B(t_h)}{A(t_h)} = \frac{Q(t_{h+1})}{A(t_h)}$$

ecuación en diferencias finitas, cuya solución general se obtiene inmediatamente sumando las igualdades que resultan al dar a t los valores $o, t_1, t_2, t_3, \ldots t_{h+1}$.

Por lo tanto,

$$\frac{B(t_{h+1})}{A(t_h)} = \sum_{j=0}^{h} \frac{Q(t_{j+1})}{A(t_{j+1})}$$

por ser $B(o) = 0$.

Si las imposiciones son realizadas por períodos vencidos, resulta

$$B(t_h) = A(t_h) \sum_{1}^{h} \frac{Q(t_j)}{A(t_j)}$$

Si lo fueran por períodos anticipados

$$B(t_h) = A(t_h) \sum_{o}^{h-1} \frac{Q(t_j)}{A(t_j)}$$

Y la transformación general será, pues

$$x_{h+k} = x_h \frac{A(h+k)}{A(h)} + A(h+k) \sum_{j=h+1}^{h+k} \frac{Q(t_j)}{A(t_j)} \quad \text{(períodos vencidos)}$$

$$x_{h+k} = x_h \frac{A(h+k)}{A(h)} + A(h+k) \sum_{j=h}^{h+k-1} \frac{Q(t_j)}{A(t_j)} \quad \text{(períodos anticipados)}$$

Conversión de imposiciones continuas en discretas y recíprocamente

En la igualdad [5[podemos sustituir las funciones $A(t)$ y $B(t)$ por sus expresiones, resultando al simplificar:

$$Q(t_{h+1}) = e^{\int_0^{t_{h+1}} \alpha(t)dt} \int_{t_h}^{t_{h+1}} \beta(t) e^{\int_t^0 \alpha(\tau)d\tau} dt \qquad [6]$$

(en el caso de imposiciones vencidas). De forma que conociendo las funciones α y β podremos determinar los valores de las cuotas Q en los instantes de sus vencimientos.

Aplicaciones.—En las aplicaciones que siguen supondremos que $\alpha(t)$ se reduce a una constante α_1 que tomaría el valor $\log(1+i)$ si no existiese despreciación; o también $\log(1+i) - 0{,}111$, en el caso de la depreciación visto anteriomente.

En este supuesto, consideraremos los tres casos siguientes para la función $\beta(t)$: *a*) constante, $\beta(t) = \beta_1$; *b*) función lineal, $\beta(t) = \beta_1 + \mu t$; *c*) función exponente, $\beta(t) = \beta_1 \lambda^t$.

a) Al sustituir en [6] las funciones α y β por las constantes α_1 y β_1 queda:

$$Q(t_{h+1}) = e^{\alpha_1 t_{h+1}} \beta_1 \int_{t_h}^{t_{h+1}} e^{-\alpha_1 t} dt = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} [1 - e^{\alpha_1 (t_{h+1} - t_h)}]$$

luego el valor de la cuota $Q(t_{h+1})$ depende, como era de esperar, del intervalo $t_{h+1} - t_h$. Pero si éste fuese constante, por ejemplo, un año, entonces la anualidad sería constante

$$Q(t_{h+1}) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} [e^{\alpha_1} - 1]$$

Recíprocamente, podríamos pasar del proceso discreto de cuotas constantes al continuo, tomando para β_1 el valor constante

$$\beta_1 = \frac{Q\alpha_1}{e^{\alpha_1} - 1}$$

Si no existiese depreciación; es decir, si $\alpha_1 = \log(1 + i)$, entonces el valor de la cuota Q sería

$$Q = \frac{i\beta_1}{\log(1 + i)}$$

y, por tanto,

$$\beta_1 = \frac{Q\log(1 + i)}{i}.$$

b) Sustituyendo β por la función lineal $\beta_1 + \mu t$ en [6] resulta:

$$Q(t_{h+1}) = e^{\alpha_1 t_{h+1}} \int_{t_h}^{t_{h+1}} (\beta_1 + \mu t)e^{-\alpha_1 t}dt$$

y al integrar por partes y simplificar resulta:

$$Q(t_{h+1}) = -\frac{1}{\alpha_1}\left[\beta_1 + \mu t_{h+1} + \frac{\mu}{\alpha_1} - e^{\alpha_1(t_{h+1} - t_h)}\left(\beta_1 + \mu t_h + \frac{\mu}{\alpha_1}\right)\right]$$

En caso de tratarse de anualidades, esto es $t_{h+1} - t_h = 1$ la cuota $Q(t_{h+1})$ toma la forma:

$$Q(t_{h+1}) = \frac{i}{\log(1 + i)}\left[\beta_1 + \mu\frac{i - \log(1 + i)}{i\log(1 + i)}\right] + \frac{\mu i}{\log(1 + i)}h$$

expresión de la forma $M + Nh$.

Luego el estudio de cualquier proceso financiero con cuotas anuales vencidas en progresión aritmética, en el cua $\alpha(t) = \log(1 + i)$ equivale al correspondiente proceso continuo, donde la función $\beta(t) = \beta_1 + \mu t$ es lineal.

c) Sea ahora la función $\beta(t) = \beta_1\lambda^t$, al sustituir en [6] e integrar resulta

$$Q(t_{h+1}) = \frac{\beta_1}{\log\lambda - \alpha_1}\left[\lambda^{t_{h+1}} - \lambda^{t_h} e^{\alpha_1(t_{h+1} - t_h)}\right]$$

como expresión de la cuota. En el caso particular de que $\alpha_1 = \log(1 + i)$, se simplifica dando

$$Q(h + 1) = \frac{\beta_1[\lambda - (1 + i)]}{\log\dfrac{\lambda}{1 + i}}\lambda^h$$

al suponer que estas cuotas son anualidades vencidas. Expresión que es de la forma Mq^h; donde los parámetros

$$\beta_1 = M \frac{\log \frac{\lambda}{1+i}}{\lambda - (1+i)} \quad ; \quad y\ \lambda = q.$$

Imposiciones en progresión geométrica.)

DESENREDANDO UN ENREDO

por E. G.-RODEJA F.

En [1] se encuentra un problema (1) que en [2] se le llama «curiosísimo enredo».

«Si A, B, C, D dicen cada uno de ellos la verdad una vez de cada tres veces (independientemente unos de otros) y si A afirma que B niega que C declara que D es un embustero (2), ¿cuál es la probabilidad de que D estuviera diciendo la verdad?»

La solución dada en [1] es simplista y no correcta. La solución dada en [2] tampoco lo es, entre otras razones por la evidente de que en los razonamientos hechos no interviene la probabilidad de que D diga verdad.

El problema interpretado como se hace en [1] y [2] es, evidentemente, indeterminado.

Si se indican con d, c, b, a las proposiciones:

$$d \equiv \text{D miente}, \qquad c \equiv \text{C declara } d,$$

$$b \equiv \text{B niega } c, \qquad a \equiv \text{A afirma } b,$$

y con

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{X} = 1, & \text{X dice verdad} \\ \mathrm{X} = 0, & \text{X dice mentira} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1, \text{ la proposición } x \text{ es verdad} \\ x = 0, \text{ la proposición } x \text{ no es verdad} \end{array}\right\}$$

El problema da las probabilidades de $\mathrm{A} = 1$, $\mathrm{B} = 1$, $\mathrm{C} = 1$, $\mathrm{D} = 1$

[1[J. GALLEGO DÍAZ: *Problemas de cálculo de probabilidades*. Madrid (1948).

[2[N. CUESTA: «Un enredo semántico-probabilístico». *Gaceta Matemática*, 12,16-21 (1960).

(1) Tomado del libro: *Eddington. New Pathways in Science.*

(2) En [2[se cambia «D es un embustero» por la frase más precisa «D miente».

y pregunta siendo $a = 1$. ¿Cuál es la probabilidad a posteriori de $D = 1$?

Las 2^8 combinaciones de valores de

$$(D, d, C, c, B, b, A, a)$$

no son todas lógicamente compatibles, para que esto suceda han de verificarse las igualdades módulo 2:

$$a \cdot (A + b) = 0, \quad b \cdot (B + c + 1) = 0, \quad c \cdot (C + d) = 0 \quad d \cdot D = 0.$$

El número de combinaciones posibles es todavía de 54, de las cuales 18 corresponden a $a = 1$. Entre las probabilidades de las 54 combinaciones conocemos en total 16 relaciones independientes, que son las que dan las sumas de las probabilidades de todos los sucesos en que A, B, C y D toman valores fijos. Las 38 relaciones que todavía son precisas no vienen dadas en el enunciado, por tanto, el problema no puede resolverse si no se adoptan hipótesis que lo simplifiquen.

Una de estas hipótesis puede ser (teniendo en cuenta que existen infinitas verdades e infinitas mentiras), que fuesen cero las probabilidades de $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Es evidente que no se deduce de que su probabilidad sea cero el que el suceso $a = 1$ no haya podido suceder. Entonces se obtiene fácilmente que la afirmación de A no hace variar la probabilidad a priori de D.

Otra hipótesis plausible es que las proposiciones sucesivamente enunciadas por C, B y A tuviesen que ser, respectivamente, una de las escritas a continuación:

$$\text{C)}\quad \left.\begin{array}{l}\text{afirma}\\ \text{niega}\end{array}\right\}\text{ que D dice }\left\{\begin{array}{l}\text{verdad}\\ \text{mentira}\end{array}\right.$$

$$\text{B)}\quad \left.\begin{array}{l}\text{af.}\\ \text{n.}\end{array}\right\}\text{ que C }\left.\begin{array}{l}\text{af.}\\ \text{n.}\end{array}\right\}\text{ que D dice }\left\{\begin{array}{l}\text{verdad}\\ \text{mentira}\end{array}\right.$$

$$\text{A)}\quad \left.\begin{array}{l}\text{af.}\\ \text{n.}\end{array}\right\}\text{ que B }\left.\begin{array}{l}\text{af.}\\ \text{n.}\end{array}\right\}\text{ que C }\left.\begin{array}{l}\text{af.}\\ \text{n.}\end{array}\right\}\text{ que D dice }\left\{\begin{array}{l}\text{v.}\\ \text{m.}\end{array}\right.$$

Todavía hay que precisar si, por ejemplo, B ha dicho verdad o mentira si C afirma que D dice verdad y B afirma que C niega que D dice mentira.

Si se supone que en este caso B ha dicho verdad y se aplica el mismo criterio para los casos análogos, las posibles proposiciones enunciadas por C, B y A se reducen esencialmente a dos en cada caso:

$$\begin{array}{ll}
\text{D dice} \left\{\begin{array}{l}\text{verdad}\\ \text{mentira}\end{array}\right. & \begin{array}{l}\equiv d_1\\ \equiv d_2\end{array}\\[2ex]
\text{C afirma} \left\{\begin{array}{l}d_1\\ d_2\end{array}\right. & \begin{array}{l}\equiv c_1\\ \equiv c_2\end{array}\\[2ex]
\text{B afirma} \left\{\begin{array}{l}c_1\\ c_2\end{array}\right. & \begin{array}{l}\equiv b_1\\ \equiv b_2\end{array}\\[2ex]
\text{A afirma} \left\{\begin{array}{l}b_1\\ b_2\end{array}\right. & \begin{array}{l}\equiv a_1\\ \equiv a_2,\end{array}
\end{array}$$

una de las cuales es verdad y la otra mentira.

En el problema se supone que ha sucedido a_1, esto implica un número par de mentiras. La probabilidad de a es, por tanto:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{41}{81}.$$

La probabilidad de la coexistencia de a_1 y d_1, (un numero par de mentiras entre B, C y A) es:

$$\frac{1}{3}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{13}{81}.$$

La probabilidad pedida será, por consiguiente:

$$\frac{13}{41}.$$

Si se supone en cambio que entre las posibles afirmaciones (negaciones) de D, C, B, A hay una sola verdad (mentira) y las demás son mentiras (verdades); y se admite que todas las mentiras (verdades) posibles en cada caso son igualmente probables, se deduce que el número de verdades (mentiras) posibles para C, B, A son, respectivamente, 2, 4 y 8.

Utilizando la notación del principio y escribiendo como primer sumando la parte que corresponde a $D = 1$, serán las probabilidades:

$$p(d = 1) = 0 + \frac{2}{3} \quad , \quad p(d = 0) = \frac{1}{3} + 0$$

$$p(c = 1) = p(d = 1)\cdot\frac{1}{2}\, p(c = 1) + p(d = 0)\cdot\frac{1}{2}\, p(c = 0) =$$

$$= \frac{2}{2\cdot 3^2} + \frac{2}{2\cdot 3^2}$$

$$p(c = 0) = \frac{4}{2\cdot 3^2} + \frac{10}{2\cdot 3^2}$$

Para el cálculo de estas probabilidades se ha tenido en cuenta que el número de posibles mentiras, así como de verdades de C es 2, y que la suma de los dos primeros sumandos de $p(c = 1)$ y $p(c = 0)$ debe ser $^1/_3$ y de los segundos sumandos $^2/_3$.

Análogamente:

$$p(b = 1) = p(c = 1) \cdot \frac{1}{4}\, p(\mathrm{B} = 0) + p(c = 0) \cdot \frac{1}{4}\, p(\mathrm{B} = 1) =$$

$$= \frac{8}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{14}{2^3 \cdot 3^3}$$

$$p(b = 0) = \frac{64}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{130}{2^3 \cdot 3^3}$$

$$p(a \cdot 1) = p(b = 1) \cdot \frac{1}{8}\, p(\mathrm{A} = 1) + p(b = 0) \cdot \frac{1}{8}\, p(\mathrm{A} = 0) =$$

$$= \frac{136}{2^6 \cdot 3^4} + \frac{274}{2^6 \cdot 3^4} = \frac{410}{2^6 \cdot 3^4}.$$

La probabilidad pedida será en este caso:

$$\frac{136}{410}.$$

Otras hipótesis del mismo tipo son posibles, y conducen a resultados distintos.

Observatorio de Santiago

NOTA SOBRE SUMACION APROXIMADA DE SERIES NUMERICAS

POR M. ROS GINER

Cuando se toma como valor de la suma de una serie convergente, la suma de sus n primeros términos, se comete un error que suele denominarse de segunda especie para distinguirlo de otro tipo de error, llamado de primera especie, que se presenta en aquellos casos en los que se consideran valores aproximados de los n términos de la serie, que se van a sumar.

La determinación del error de primera especie se estudia en los capítulos sobre números aproximados de muchos tratados (ver por ejemplo: Rey Pastor, *Análisis algebraico*).

En esta nota nos ocuparemos de la determinación del error de segunda especie, refiriéndonos especialmente a las series de términos positivos, y distinguien varios casos, según el criterio empleado para averiguar el carácter de la serie.

Empleando la notación habitual $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ se tiene $S = S_n + R_n$ y al tomar S_n como valor de S se comete un error que viene medido por el resto enésimo R_n. Se trata, pues, de acotar R_n.

1.º *Series cuya convergencia se determina por el criterio del cociente.*

Según este criterio, desde un valor de n en adelante $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant k < 1$

luego se tiene $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant k \quad .. \quad \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leqslant k \quad .. \quad \dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}} \leqslant k \ldots$

o sea:

$$a_{n+1} \leqslant k\, a_n \;\; ; \;\; a_{n+2} \leqslant k\, a_{n+1} \leqslant k^2 \cdot a_n \quad .. \quad a_{n+3} \leqslant k\, a_{n+2} \leqslant k^3 \cdot a_n$$

y así sucesivamente. Sumando las desigualdades obtenidas, resulta

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots < a_n [k + k^2 + k^3 + \dots] = \frac{k}{1-k} a_n$$

luego

$$\varepsilon_2 < \frac{k}{1-k} a_n.$$

Con el fin de obtener, en cada caso, la cota de error más ajustada posible pueden emplearse las siguientes normas.

Si la razón de un término al anterior es decreciente se toma para k el propio valor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{resultando} \quad \varepsilon_2 < \frac{a_{n+1}}{1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}}$$

Si la razón

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

tiene límite l (caso frecuente)) y tiende hacia l por valores inferiores se puede tomar $k = l$ resultadndo

$$\varepsilon_2 < \frac{l}{1-l} a_n.$$

Ejemplo: Calcular el valor de la suma de la serie

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$$

con error menor que $\dfrac{1}{2 \cdot 10^4}$.

En este caso

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\, 3^n} : \frac{1}{n(n+1)\, 3^{n-1}} = \frac{n}{3(n+2)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

por valores crecientes. Se puede tomar $k = \dfrac{1}{3}$ resultando

$$\varepsilon_2 < \frac{\dfrac{1}{3}}{1 - \dfrac{1}{3}} \cdot \frac{1}{n(n+1)\, 3^{n-1}}.$$

Para que $\varepsilon_2 < \dfrac{1}{2 \cdot 10^4}$ debe ser $n(n+1)\, 3^{n-1} > 10^4$ desigualdad que se cumple para $n \geqslant 6$.

Si calculamos cada uno de los seis primeros términos de la serie con cinco cifras decimales exactas y por exceso, resulta

$$S'_6 = 0{,}5 + 5 + 0{,}5556 + 0{,}00926 + 0{,}00186 + 0{,}00042 +$$
$$+ 0{,}00010 = 0{,}56720$$

Este número es un valor aproximado de S_6, por exceso, con error menor que $\dfrac{5}{10^5} = \dfrac{1}{2 \cdot 10^4}$ mientras que a su vez S_6 es un valor aproximado de S, por defecto, con error menor de $\dfrac{1}{2 \cdot 10^4}$. Luego el número 0,56720 es un valor aproximado de la suma de la serie con error menor que $\dfrac{1}{2 \cdot 10^4}$ como se deseaba.

2.º *Series cuya convergencia se determina por el criterio de la raiz.*

Según este criterio, desde un valor de n en adelanta $\sqrt[n]{a_n} \leqslant k < 1$. Procediendo en forma análoga, a como se hizo en el caso anterior tendremos

$$\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leqslant k \,..\, \sqrt[n+2]{a_{n+2}} \leqslant k \,..\, \sqrt[n+3]{a_{n+3}} \leqslant k \,\ldots.. \text{ o bien}$$

$$a_{n+1} \leqslant k^{n+1} \,..\, a_{n+2} \leqslant k^{n+2} \,..\, a_{n+3} \leqslant k^{n+3}$$

Sumando estas desigualdades se obtiene

$$R_n < k^{n+1} + k^{n+2} + k^{n+3} + \ldots = \frac{k^{n+1}}{1-k} \quad \text{luego} \quad \varepsilon_2 < \frac{k^{n+1}}{1-k}$$

Conviene escoger en cada caso el valor más pequeño posible de k que verifique las anteriores desigualdades.

Como guía puede indicarse que si la raiz enésima del término a_n, decrece al crecer n se puede tomar para k el propio valor $\sqrt[n+1]{a_{n+1}}$ y será:

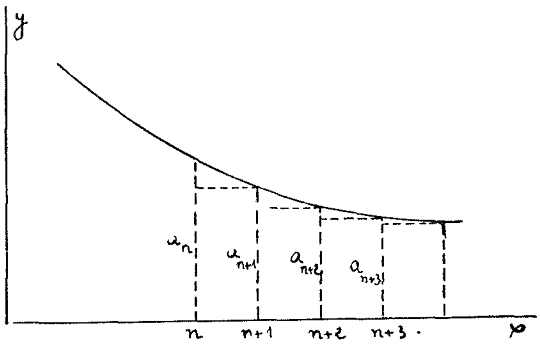
$$\varepsilon_2 \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - \sqrt[n+1]{a_{n+1}}}$$

Si la sucesión $\sqrt[n]{a_n}$ tiene límite (caso frecuente) y tiende hacia él de forma creciente, se puede tomar $k = l$ obteniéndose

$$\varepsilon_1 \leqslant \frac{l^{n+1}}{1 - l}$$

3.º *Series cuya convergencia se determina por el criterio de la integral.*

Según este criterio si la función $y = f(x)$ es monótona decreciente y la integral $\int_p^{\infty} f(\alpha)dx$ es convergente la serie $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots$ es también convergente.



Como $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ el resto enésimo está acotado por el área comprendida entre la curva representación de $y = f(x)$, el eje de abscisas y la ordenada correspondiente a $x = n$.

Luego

$$\varepsilon_2 < \int_n^{\infty} f(x)dx.$$

Si aplicamos esta conclusión a la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

(siendo $a > 1$) obtendremos

$$\varepsilon_2 < \int_n^{\infty} \frac{1}{x^a}\, dx = \frac{1}{(a - 1)n^{a-1}}.$$

Por ejemplo en el caso de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$, si se desea obtener la suma con error menor que 10^{-2} debe ser

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot n^{1/2}} < \frac{1}{10^2}$$

desigualdad que se cumple para $n > 40000$, lo que indica que la convergencia es muy lenta.

4.º *Series cuyas convergencia se determina por el criterio de Pringsheim*

Según este criterio si desde un valor de n en adelante se verifica $n^a \cdot a_n \leqslant k$, siendo k fijo y $a > 1$. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Así, pues, verificándose

$$a_{n+1} \leqslant \frac{k}{(n+1)^a} \quad \dots \quad a_{n+2} \leqslant \frac{k}{(n+2)^a} \quad \dots\dots$$

se obtiene

$$R_n < k \left[\frac{1}{(n+1)^a} + \frac{1}{(n+2)^a} + \dots \right]$$

y según se vió en el caso anterior

$$R_n < \frac{k}{(a-1)n^{a-1}}.$$

Para elegir en cada caso, el valor de k más pequeño posible pueden seguirse las siguientes normas:

Si la sucesión $(n+1)^a \cdot a_{n+1}$ tiende hacia un límite l de manera creciente se toma $k = l$.

Si la citada sucesión es decreciente puede tomarse para k el propio valor $k = (n+1)^a \cdot a_{n+1}$.

Ejemplo.—Hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{2+1^3} + \frac{1}{2+2^3} + \frac{1}{2+3^3} + \dots + \frac{1}{2+n^3} + \dots$$

con error menor que 10^{-2}.

En este caso ocurre que $n^3 \cdot a_n \to 1$ por valores crecientes. Tomando $k = 1$ se obtiene $\varepsilon_2 < \frac{1}{2 \cdot n^2}$. La inecuación $\frac{1}{2n^2} < \frac{1}{100}$ se verifica para $n > 8$.

Calculemos la suma

$$\frac{1}{2 + 1^3} + \frac{1}{2 + 2^3} + \ldots + \frac{1}{2 + 8^3}$$

tomando los sumandos con cuatro decimales y por exceso. Se obtiene $S'_8 = 0{,}5005$ con error menor que $8 \cdot 10^{-4}$. Luego 0,500 tiene todas sus cifras exactas. Como $\varepsilon_2 < \dfrac{1}{2 \cdot 64} = \dfrac{1}{128} < 0{,}008$ resulta definitivamente que $S' = 0{,}50$ es el valor de la suma de la serie con la aproximación pedida.

5.º *Series cuya convergencia se determina por el criterio logarítmico de Cauchy.*

Según este criterio su desde un valor de n en adelante se verifica

$$\frac{L \dfrac{1}{a_n}}{n} \geqslant a > 1$$

la serie es convergente.

Como de la condición anterior se deduce que

$$a_n \leqslant \frac{1}{n^a}$$

estamos ante un problema resuelto en el caso anterior por lo que directamente podemos poner

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{(a - 1)n^{a-1}}$$

6.º *Series cuya convergencia se determina por el criterio de Raabe-Duhamel.*

El criterio de Raabe-Duhamel dice que si se tiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \alpha_n}$$

y la expresión $n\alpha_n$ se conserva, desde un valor de n en adelante, mayor o igual que un número $k > 1$ la serie es convergente.

Como $\alpha_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1$, escogiendo convenientemente el número

$k > 1$ se tendrá:

$$n \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] \geqslant k \;.$$

o sea, $n\, a_n - (n+1)\, a_{n+1} \geqslant (k-1)\, a_{n+1}$, de donde,

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{k-1} \left[na_n - (n+1)\, a_{n+1} \right]$$

y análogamente,

$$a_{n+2} \leqslant \frac{1}{k-1} \left[(n+1)\, a_{n+1} - (n+2)\, a_{n+2} \right] \text{ etc.}$$

Sumando miembro a miembro se tiene:

$$R_n < \frac{1}{k-1} na_n \qquad \text{o sea,} \qquad \varepsilon_2 < \frac{na_n}{k-1}$$

Si la expresión $[n \cdot \alpha_n]$ tiene límite l (caso frecuente) y tiende hacia l por valores decrecientes se toma $k = l$.

Si la expresión $[n\alpha_n]$ es monótona creciente se toma $k = n \cdot \alpha_n$.

Ejemplo: Dada la serie

$$\frac{1}{a} + \frac{2\,!}{a(a+1)} + \frac{3\,!}{a(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{n\,!}{a(a+1)\ldots(a+n-1)} + \ldots\ldots$$

y siendo $a = 10$, ¿cuántos términos deben sumarse para obtener la suma de la serie con error menor que 10^{-3}?

Se tiene $n \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] = \frac{n(a-1)}{n+1} \rightarrow a - 1 = 9$ de manera creciente.

Tomando como valor de k el de $n\alpha_n = \frac{n\,(a-1)}{n+1}$ resulta

$$\varepsilon_2 < \frac{n \cdot (n+1)\,!}{a\,(a+1)\ldots\ldots(a+n-1)\,(na-2n-1)}$$

La inecuación $\varepsilon_2 < 10^3$ se cumple para $n \geqslant 4$. Así, pues, habrían de sumarse los cuatro primeros términos de la serie.

8.º. *Series alteradas.*

El error cometido al tomar como suma de la serie alternada convergente $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$ la suma parcial $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n$, es menor que a_{n+1}, siendo la aproximación por defecto si n es impar y por exceso si n es par (véase Rey Pastor, *Análisis algebraico*).

Ejemplo.—Hallar $\sqrt[3]{126}$ con cinco cifras decimales exactas. Se tiene

$$\sqrt[3]{126} = (125 + 1)^{1/3} = 5\left(1 + \frac{1}{5^3}\right)^{1/3} = 5\left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!} \cdot \frac{1}{5^6} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!} \cdot \frac{1}{5^9} + \ldots\right] =$$

$$= \left(5 + \frac{1}{3 \cdot 5^2}\right) - \frac{1}{9 \cdot 5^5} + \frac{1}{81 \cdot 5^7} - \ldots$$

que es una serie alternada. Tomando

$$S' = 5 + \frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{1}{9 \cdot 5^5}$$

se comete un error

$$\varepsilon < \frac{1}{81 \cdot 5^7} < \frac{1}{10^3}$$

y la aproximación es por defecto.

Calculando el valor de S′ resulta $5{,}01329 < \sqrt[3]{126} < 5{,}01330$.

Otras consideraciones.

Si la serie a sumar es caso particular de un desarrollo indefinido de Mac-Laurin, la acotación del término complementario suministra un medio cómodo de obtener el error de segunda especie, ya que al ser

$$f(x) = f(o) + \frac{f'(o)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n-1}(o)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n.$$

y tomar como valor de $f(x)$ la suma de los n primeros términos de la serie de Mac-Laurin se comete un error que viene medido por el término complementario. Para acotarle, si se emplea, por ejemplo, la forma de Lagrange,

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x) \qquad o < \theta < 1$$

basta obtener una cota de $|f^n(\theta x)|$ en el integral $[o, x]$ y si esta cota es k se tendrá

$$\varepsilon_2 < \frac{|x|^n}{n!} k.$$

Ejemplo.—En la serie

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

si se toman los n primeros términos el error cometido es

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}.$$

Para $x = 1$ la suma

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}$$

es un valor aproximado del número e con error menor que $\frac{3}{n!}$ ya que $e^\theta < 3$.

También podría procederse en este caso acotando la serie

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots$$

mediante la progresión geométrica

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} + \frac{1}{n!n^2} + \dots = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{(n-1)!\,(n-1)}$$

Comparando las cotas obtenidas por caminos diferentes se observa que la cota $\frac{3}{n!}$ es, para valores grandes de n, casi el triple de la cota

$$\frac{1}{(n-1)!\,(n-1)}.$$