NOTAS DE DIVULGACION

LA PROPIEDAD CONMUTATIVA EN LAS SERIES INFINITAS Y LA FORMULA DE PRINGSHEIM

Por JUAN ANTONIO CANO CARAVACA

Es bien sabido, que al extender la operación de sumar al conjunto de los infinitos términos de una sucesión, se pierden gran parte de las propiedades de que gozaba aquella, y en particular deja de ser cierta la propiedad conmutativa, a no ser que se cumplan determinadas condiciones que vamos a analizar. Consideremos para ello una serie cualquiera de números reales

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \qquad (1)$$

y sean:

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \\ &b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \end{aligned} \qquad (2)$$

las series formadas por los sumandos positivos y negativos respectivamente de (1). El conocido e importante teorema de Riemann asegura:

1.º Si las series (2) son convergentes, la (1) es incondicionalmente convergente.

2.º Si una de las series (2) es convergente y la otra divergente, la (1) es incondicionalmente divergente.

3.º Si las series (2) son divergentes y el término general de (1) tiende a cero, cambiando convenientemente el orden de los sumandos de (1) se obtienen series equivalentes a la dada convergentes hacia cualquier número prefijado de antemano, divergentes, o indeterminadas con límites de oscilación arbitrariamente elegidos.

En este tercer caso, aunque el término general de (1) **no** tiende hacia cero, siempre es posible al menos, cambiando el orden de los términos de (1), construir dos series, una divergente hacia $+\infty$ y otra hacia $-\infty$

En efecto, por ser las series (2) divergentes, si elegimos, por ejemplo, los números α, β, γ, ... de forma que se verifique:

$$
\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + a_3 + \quad \ldots\ldots\ldots + a_\alpha > b_1 + 1 \\
&a_{\alpha+1} + a_{\alpha+2} + \ldots \ \ldots + a_\beta > b_2 + 1 \\
&a_{\beta+1} + a_{\beta+2} + \ldots\ldots + a_\gamma > b_3 + 1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

la serie $a_1 + a_2 + \ldots + a_\alpha - b_1 + a_{\alpha+1} + a_{\alpha+2} + \ldots + a_\beta - b_2 + a_{\beta+1} + \ldots + a_\gamma - b_3 + \ldots$ resulta divergente hacia $+\infty$.

Análogamente se puede construir una serie divergente hacia $-\infty$.

De aquí resulta que las series del tercer caso no gozan nunca de la propiedad conmutativa, mientras que las del 1.º y 2.º siempre tienen dicha propiedad. Podemos, pues, decir, que la condición necesaria y suficiente para que en una serie de números reales se verifique la propiedad conmutativa es que una, al menos, de las series formadas por los términos de igual signo sea convergente.

Cuando la serie dada no goza de la propiedad conmutativa, siendo el término general un infinitésimo, el teorema de Riemann no sólo asegura que cambiando el orden de los sumandos se obtienen series que tienden a un límite prefijado, sino que indica la forma en que han de ordenarse los términos de la serie para obtener el límite elegido. Sin embargo, en las aplicaciones prácticas, resulta casi siempre más útil la fórmula que vamos a ver, debida a Pringsheim, a pesar de que su campo de aplicación es más reducido.

Sea S la suma de la serie (1), supuesta convergente, y S' la suma de la serie obtenida tomando alternativamente un término positivo y otro negativo de (1) en el mismo orden en que están.

Si V_n es el término general de la serie alternada así formada,

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot V_n$$

pongamos la condición de que nV_n tenga un límite finito y no nulo a:

$$\lim_{n \to \infty} nV_n = a \tag{3}$$

En este caso, siendo p y q el número de términos positivos y negativos, respectivamente, contenidos en los n primeros sumandos de (1) se tendrá:

$$
\begin{aligned}
S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = (V_1 - V_2 + V_3 - \ldots + \\
+ V_{2q-1} - V_{2q}) + (V_{2q+1} + V_{2q+3} + \ldots + V_{2p-1})
\end{aligned} \tag{4}
$$

y de (3) se deduce que a partir de un cierto valor de n:

$$a - \varepsilon < n\,V_n < a + \varepsilon \ ; \quad \frac{a-\varepsilon}{n} < V_n < \frac{a+\varepsilon}{n} \quad ; \qquad \varepsilon > 0$$

de donde:

$$(a - \varepsilon)\left(\frac{1}{2q+1} + \frac{1}{2q+3} + \dots + \frac{1}{2p-1}\right) <$$

$$< \sum_{n=2q+1}^{2p-1}{}' V_n < (a + \varepsilon)\left(\frac{1}{2q+1} + \frac{1}{2q+3} + \dots + \frac{1}{2p-1}\right)$$

y puesto que:

$$\lim_{q \to \infty}\left(\frac{1}{2q+1} + \frac{1}{2q+3} + \dots + \frac{1}{2p-1}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\lim \frac{p}{q}\right)$$

y ε es arbitrario, se concluye que:

$$\lim_{q \to \infty} \sum_{n=2q+1}^{2p-1}{}' V_n = \frac{1}{2} \lim (nV_n) \cdot \log\left(\lim \frac{p}{q}\right)$$

y, por tanto, tomando límites en (4)

$$S = S' + \frac{1}{2} \lim (nV_n) \cdot \log\left(\lim \frac{p}{q}\right)$$

fórmula que resuelve el problema propuesto.

Si, por ejemplo, $V_n = \dfrac{1}{n}$ resulta la fórmula siguiente debida a Ohm:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q} +$$

$$+ \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \dots = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$$

Dejamos para otra nota otros casos posibles que puedan presentarse.