SOBRE LAS BISECTRICES DE UN TRIANGULO

POR E. G.-RODEJA F.

Esta nota ha sido motivada por la recensión de *N. A. Court* (Norman, Okla) (1) a un trabajo de G. PETROV (2) en la que (siendo b, c dos lados de un triángulo y l_a la bisectriz interior del ángulo A) entre otras cosas se dice:

»The author arrives at the following necessary and sufficient condition for the constructibility of the triangle:

$$O < l_a < 2bc/(b + c),$$

an elegant relation for which this reviewer knows no explicit reference. [Notice that the right hand side of this inequality is the armonic mean of b and c].»

La relación

$$O < l_a < 2bc/(b + c) \qquad [1]$$

es consecuencia inmediata de la

$$l_a = \frac{2bc}{b + c} \cos \frac{A}{2}, \qquad [2]$$

que puede obtenerse de las conocidas

$$l_a = \frac{2}{b + c} \sqrt{bcp(p - a)}, \qquad [3]$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}, \qquad [4]$$

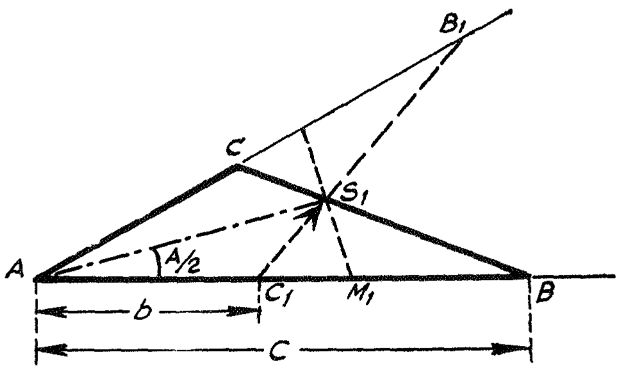
o bien directamente en la forma que a continuación indicamos.

(1) *Mathematical Reviews*, 18, 501.
(2) PETROV, G.: *Sur les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence du triangle.* Univ. d'Etat Staline Fac. Tech. Constructions. Annuaire 5 (1949-50), 127-152. (Bulgarian, French summary.)

En el triángulo ABC sea AS_1 la bisectriz del ángulo A, AB_1C_1 el triángulo simétrico al ABC respecto a dicha bisectriz, M_1S_1 perpendicular a la misma. Siendo S_1M_1 y S_1A bisectriz interior y exterior del triángulo BS_1C_1 se deduce que M_1 está separado armónicamente de A por B y C_1,

$$AM_1 = 2bc/(b + c),$$

de donde [2].



La fórmula [2] permite establecer el siguiente lugar geométrico: *Si A y B son dos puntos fijos del plano y C describe una circunferencia de centro A, el lugar geométrico del punto S_1 intersección de la bisectriz interior del ángulo A con la recta BC es la circunferencia de diámetro AM_1, donde M_1 es el punto armónicamente separado del A por el punto B y el punto C_1 en que corta la circunferencia descrita por C a la semirecta AB.*

La demostración es consecuencia inmediata de la invariabilidad de M_1.

Las consideraciones anteriores permiten una fácil construcción de un triángulo dados b, c, l_a (dos lados y la bisectriz interior del ángulo comprendido). Para ello basta dibujar sobre la misma semirecta dos segmentos AB y AC_1 iguales a c y b; construir el punto M_1 armónicamente separado del A por B y C_1; la intersección de las circunferencias de centro A con radio l_a y la de diámetro AM_1 es el punto S_1 donde se cortan la bisectriz y el lado a. Conocido el triángulo ABS_1, la intersección de BS_1 con la recta simétrica de AB respecto a AS_1 es el tercer vértice C.

Las relaciones análogas a las [1] y [2] con la bisectriz exterior l'_a son para $c > b$:

$$0 < l'_a < \frac{2bc}{c - b}, \qquad [5]$$

$$l'_a = \frac{2bc}{c - b} \operatorname{sen} \frac{A}{2}, \qquad [6]$$

que pueden obtenerse de la misma forma y dan lugar a las mismas consideraciones, analogo lugar geométrico y construcción.

Llamando C_2, M_2 y S_2 a los puntos correspondientes para la bisectriz exterior de los C_1, M_1 y S_1, la única diferencia estriba en que C_2 y M_2 están situados en la semirecta opuesta a la AB; la repetición de lo análogo a lo dicho es, por tanto, obvia.

OBSERVATORIO DE SANTIAGO