EL PROBLEMA DE LA AGUJA DE BUFFON EN EL ESPACIO DE *N* DIMENSIONES

por

DARÍO MARAVALL CASESNOVES

Consideremos el espacio euclídeo de n dimensiones dividido por hiperplanos de $n - 1$ dimensiones H, paralelos y a distancias iguales unos de otros d. Se coloca al azar (en el sentido de la Geometría Integral) una aguja de longitud r ($r < d$), y vamos a calcular la probabilidad P de que la aguja corte a uno cualquiera de los hiperplanos H.

Tracemos una recta R, perpendicular a los hiperplanos H, sus intersecciones con los mismos son puntos A, a distancias iguales unos de otros e iguales a d.

Si la aguja corta a un hiperplano H_i, su proyección sobre R contendrá la intersección de R y H_i, que es un punto de la serie anterior, A_i. Por tanto, la probabilidad P será la misma que la de que un segmento de longitud aleatoria x (proyección sobre R del segmento r orientado uniformemente al azar) situado al azar sobre la recta R, contenga un punto A_i. Pero para que así sea es preciso que el origen del segmento x, pudiendo ocupar una distancia d sobre R (entre A_{i-1} y A_i) caiga a una distancia igual o menor que x del punto A_i. Si x fuese una longitud cierta, la probabilidad P sería x/d, pero como es una longitud aleatoria, la probabilidad P es

$$P = \frac{\overline{x}}{d} = \frac{r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} \theta \cos \theta d\theta}{d \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} \theta d\theta}$$

ya que si θ es el ángulo que forma una recta orientada uniformemente al azar en un espacio euclídeo de n dimensiones con una recta fija, su función de frecuencias es proporcional a $\operatorname{sen}^{n-2}\theta$, y x es igual a $r \cdot \cos\theta$. Luego

$$P = \begin{cases} \dfrac{r}{(n-1)d} \cdot \dfrac{2 \cdot 4 \ldots (n-3)}{1 \cdot 3 \ldots (n-2)} & \text{si es } n \text{ impar} \\[2ex] \dfrac{r}{\pi d} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{n-2}{2}\right)!\, 2^{n-1}}{(n-1)\,!} & \text{si es } n \text{ par} \end{cases}$$

que para $n = 2$, 3 y 4 da, respectivamente:

$$\frac{2r}{\pi d} \;;\quad \frac{r}{2d} \;;\quad \frac{4r}{3\pi d}$$

La probabilidad P es una función decreciente de n, y tiende a cero para n tendiendo a infinito, resultado que está de acuerdo con el hecho de que la proyección sobre un diámetro de un punto repartido uniformemente al azar sobre la superficie de una esfera converge en probabilidad hacia el centro cuando el número de dimensiones del espacio tiende a infinito. (Véase mi memoria: *Nuevos modelos de distribuciones y de procesos estocásticos*. Rev. R. Acad. de Ciencias, t. LII, 1958.)