CONSIDERACIONES DINAMICAS SOBRE EL VUELO DE LOS AVIONES A PROPULSION COHETE. ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO

por

MATEO F. CHICARRO

La obtención de las ecuaciones diferenciales que determinen el vuelo de un avión propulsado por cohetes, constituyen un amplio problema que vamos a tratar de simplificar lo más posible, permitiéndonos una serie de concesiones que nos conducirán a ecuaciones no muy complicadas, que proporcionarán una solución aproximada y útil para un primer estudio de la cuestión.

En términos generales, un cohete es un aparato o proyectil empujado por la reacción de un chorro de gas. Es decir, que es un ingenio que lleva un cierto peso de propulsor y lo arroja a la mayor velocidad posible, teniendo lugar esta acción con acompañamiento de energía química. Esta velocidad de escape *(exhaust speed)* es, pues, debida a dichos procesos fisicoquímicos que ocurren dentro del cuerpo del cohete.

Ahora bien, si todas las substancias necesarias para el proceso acabado de indicar son llevadas dentro del cohete, entonces estamos hablando de «propulsión cohete», pero si el oxigeno necesario para la combustion es tomado de la atmósfera circundante a través de la cual el ingenio se mueve, entonces hablamos de «propulsión a chorro». Nosotros nos concretaremos al primer caso y en resumen nos vamos a referir a la dinamica simplificada del avión cohete, sin preocuparnos en absoluto de la cuestión energia, para lo que supondremos únicamente que, como hemos dicho, una cierta cantidad de masa es lanzada por unidad de tiempo con una cierta velocidad, investigando el movimiento del avión sobre el que actua, ademas de la fuerza de reacción de masa, otras fuerzas que analizaremos y que juegan un importante papel.

En el presente momento la North American Aviation Company esta construyendo un vehiculo de investigación, el «X-15» que es un avión pilotado, de 15 toneladas, que alcanzaría alturas del orden de 300 a 500 kilómetros, con velocidades correspondientes a números de Mach de 6 ó 7.

Si en este momento dicho avión recibiese una impulsión suplementaria por cohetes que le permitieran alcanzar una velocidad 22.500 kilómetros por hora, podría describir su órbita alrededor de la Tierra como un satélite artificial.

La ventaja de este avión «espacial» sería la de poder volver a traer a tierra a su piloto, es decir, que podría ser considerado como una especie de «vehículo espacial» de pequeño alcance. Si las pruebas resultan satisfactorias, sería presumible esperar los vuelos espaciales para 1965, con lo que de unos satélites sin alma se pasaría a la conquista del espacio por el hombre, probándose que el avión pilotado no ha dicho aún su última palabra.

El «North American X-15» estará provisto de alerones aerodinámicos convencionales para volar en la atmósfera hasta los 30.000 metros de altura y mandos a reacción para desplazarse en el espacio

El segundo principio de Newton

El teorema del centro de gravedad, cuyo estudio corresponde a la Dinámica de los Sistemas, nos dice que para los cuerpos rígidos, la masa de un cuerpo multiplicada por la aceleración del centro de gravedad, es igual a la suma de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el mismo. En este sentido, el teorema nos resulta inaplicable al caso que consideramos, toda vez que al irse quemando combustible y producirse el chorro de gas, la masa forzosamente ha de disminuir. Para poder plantear el problema, tenemos que partir del segundo principio de Newton que lo estableció bajo forma profética al decir: «la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento es igual a la suma de todas las fuerzas exteriores».

En efecto, sea un instante determinado t y llamemos m a la masa total del avión con sus diversos aparatos, pasajeros, etc., y del combustible que queda en dicho instante por quemar; designemos por v la velocidad del aparato y por c la velocidad relativa, al avión-cohete, de los gases que salen por la parte posterior del mismo, es decir, lo que hemos llamado velocidad de escape o de evacuación. Sea $\frac{dm}{dt} = \dot{m} = -\mu$ la cantidad de masa proyectada en la unidad de tiempo, en donde μ es una cantidad positiva afectada del signo menos, puesto que la masa va disminuyendo al agotarse el combustible.

Pues bien, con las anotaciones anteriores determinemos la cantidad de movimiento $\overline{p}$ en el instante t y en un instante posterior $t + \Delta t$. Por definición tendremos para el instante t (1):

$$\overline{p_t} = m\overline{v}$$

Un instante Δt posterior, la cantidad de masa proyectada hacia atrás será $\mu\Delta t$ con lo que la cantidad de movimiento correspondiente

(1) Mediante el símbolo $\overline{a}$ designamos las cantidades vectoriales

deberá ser $\mu\Delta t(\overline{v} - \overline{c})$, puesto que la velocidad absoluta de dicha masa respecto a los ejes de referencia es $\overline{v} - \overline{c}$. En cuanto al av'ón-cohete en sí, la cantidad de movimiento en ese instante posterior será:

$$(m + \Delta m) \cdot (\overline{v} + \overline{\Delta v})$$

con lo que la cantidad de movimiento del sistema avión-masa proyectada será en el instante $t + \Delta t$:

$$\overline{p}_{t+\Delta t} = (m + \Delta m) \cdot (\overline{v} + \overline{\Delta v}) + \mu(\overline{v} - \overline{c})\Delta t$$

y como consecuencia, el incremento de la cantidad de movimiento:

$$\overline{p}_{t+\Delta t} - \overline{p}_t = \overline{\Delta p} = (m + \Delta m) \cdot (\overline{v} + \overline{\Delta v}) + \mu(\overline{v} - \overline{c})\Delta t - m\overline{v}$$

y, por tanto, el cociente incremental

$$\frac{\overline{\Delta p}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \overline{v} + m \cdot \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} + \frac{\Delta m \cdot \overline{\Delta v}}{\Delta t} + \mu(\overline{v} - \overline{c})$$

Si ahora al incremento Δt del tiempo le hacemos tender a cero, tenemos en cuenta que

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = -\mu$$

y despreciamos infinitésimos de segundo orden, tendremos sucesivamente

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \overline{v} + m\frac{d\overline{v}}{dt} + \mu(\overline{v} - \overline{c})$$

$$= m \cdot \frac{d\overline{v}}{dt} - \mu\overline{c} = m\frac{d\overline{v}}{dt} + \dot{m}\overline{c}$$

Pero por el segundo principio de Newton, que enunciamos más arriba la derivada de la cantidad de movimiento es igual a la suma de todas las fuerzas exteriores $\Sigma\overline{F}_e$, es decir,

$$m \cdot \frac{d\overline{v}}{dt} + \dot{m}\,\overline{c} = \Sigma\overline{F}_e \qquad (1)$$

o bien llamando $\overline{a}$ a la aceleración

$$\mathrm{m} \cdot \overline{a} = \Sigma\overline{F}_e - \dot{m}\,\overline{c} \qquad (1a)$$

en donde $-\dot{m}\,\overline{c}$ es conocida con el nombre de «fuerza de reacción de los gases».

Esta es una ecuación vectorial que podemos proyectar sobre los ejes que más nos convengan, y nosotros vamos a tomar para ello los *intrínsecos,* es decir, obtendremos las llamadas ecuaciones intrínsecas al proyectar la ecuación sobre el triedro fundamental que tiene por origen el centro de gravedad del avión donde hemos supuesto concentrada toda la masa, y por ejes la tangente a la trayectoria de éste, en el sentido positivo de los arcos, la normal principal dirigida hacia el centro de curvatura y la binormal tomada en un sentido tal que el triedro así formado tenga una orientación positiva.

Desde luego nosotros vamos a considerar que el avión es un cuerpo geométricamente semejante desplazándose de modo que la velocidad de su centro de gravedad $\bar{v}$ esté siempre situada en el plano de simetría y forme un ángulo α, llamado de «incidencia» o de «ataque», con una cierta recta (D) unida al perfil del ala (fig. 1 ª); por γ designaremos al ángulo que forma dicha velocidad v con la horizontal y por φ indicaremos el ángulo formado por la línea de acción (R) de la fuerza de reacción de los gases con la horizontal, habiéndose admitido que esta fuerza está en el plano de simetría del avión y que pasa a través de su centro de gravedad con lo que no tiene respecto a éste, momento estático alguno

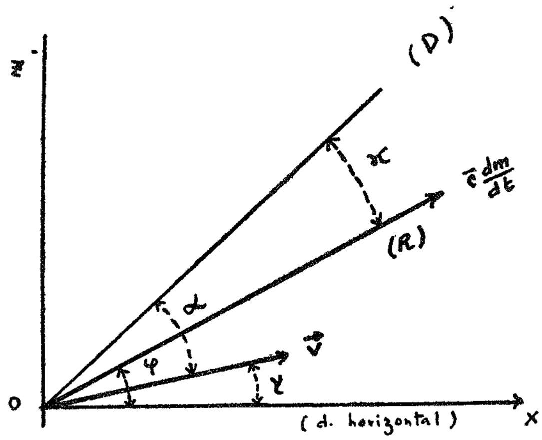

Figura 1.

Como consecuencia de lo anterior y según puede verse en la figura el ángulo $\varkappa$ entre las rectas (D) y (R) valdrá:

$$\varkappa = \alpha + \gamma - \varphi$$

La resultante de las fuerzas aerodinámicas estara indudablemente situada en el plano de la figura, es decir, en el de simetría, y en resumen podemos añadir que la simplificación del movimiento que vamos a estudiar es la de considerar un movimiento plano.

Fuerzas exteriores y fuerzas aerodinámicas

En el presente estudio vamos a suponer que el avión-cohete va a describir trayectorias para las cuales se pueden despreciar hechos tales como la variación de la atracción gravitatoria terrestre con la altura;

el no paralelismo en la atracción gravitacional en los diferentes puntos de la superficie terrestre; la atracción del Sol y de la Luna, así como la de las estrellas; la fuerza centrífuga debida a la rotación terrestre y en fin, todas aquellas fuerzas cuya acción para el caso que consideramos tengan escasa influencia.

Pasemos a ver las distintas fuerzas.

1. *Fuerzas exteriores. Gravedad.*

Suponemos como acabamos de indicar que el campo de la gravedad terrestre es uniforme, de modo que el avión-cohete cuya masa es m estará sometido a una fuerza $\overline{mg}$ aplicada en su centro de gravedad, fuerza constante en magnitud y cuya dirección seré la de la vertical descendente.

Según las notaciones angulares cuyas definiciones se dieron en el punto anterior, las proyecciones de estas fuerzas según los ejes intrínsecos serán:

$-mg \operatorname{sen} \gamma$	en la dirección de la tangente a la trayectoria del centro de gravedad, en el instante que se considere.
$-mg \cos \gamma$	en la dirección de la normal a dicha trayectoria.

2. *Fuerzas aerodinámicas.*

La resistencia del aire al movimiento del avión podemos considerarla descompuesta en dos: una la fuerza T (fig. 2) dirigida en sentido contrario de la velocidad, actuando a través del centro de gravedad y que es conocida con el nombre de «arrastre». La otra componente es la fuerza P denominada «sustentación», perpendicular a la dirección de la velocidad, pasando también por el centro de gravedad.

Si llamamos ρ a la densidad del aire, S a la superficie de la proyección del ala sobre un plano perpendicular al perfil pasando por la recta (D), las bien conocidas expresiones para el arrastre y la sustentación son las siguientes:

$$T = C_T \cdot S \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2}$$

$$P = C_P \cdot S \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2}$$

en donde los coeficientes C_T y C_P no dependen de las unidades escogidas como se demuestra en cualquier tratado de Mecánica de flúidos. Estos dos coeficientes, para un perfil determinado, no dependen más que

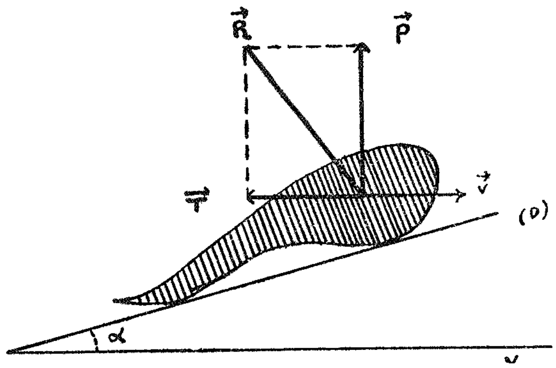

Figura 2.

del conocido número de Reynolds y del ángulo de incidencia o de ataque α, es decir, que serán de la forma

$$C_T = C_T\left(\frac{vd}{\nu}, \alpha\right)$$

$$C_P = C_P\left(\frac{vd}{\nu}, \alpha\right)$$

siempre y cuando las velocidades v permanezcan muy inferiores a la velocidad v_0 del sonido. En el caso de que la velocidad v sobrepase el valor $\frac{v_0}{2}$, la forma de los coeficientes es

$$C_T = C_T\left(\frac{vd}{\nu}, \frac{v}{v_0}, \alpha\right)$$

$$C_P = C_P\left(\frac{vd}{\nu}, \frac{v}{v_0}, \alpha\right)$$

pero en la casi totalidad de las experiencias, la influencia de la viscosidad manifestada por el término vd/ν aparece como despreciable cuando la relación $\frac{v}{v_0}$ sobrepasa el valor 0,4. Es este dominio que se considera como de grandes velocidades, en el que podrá escribirse entonces:

$$C_T = C_T\left(\frac{v}{v_0}, \alpha\right)$$

$$C_P = C_P\left(\frac{v}{v_0}, \alpha\right)$$

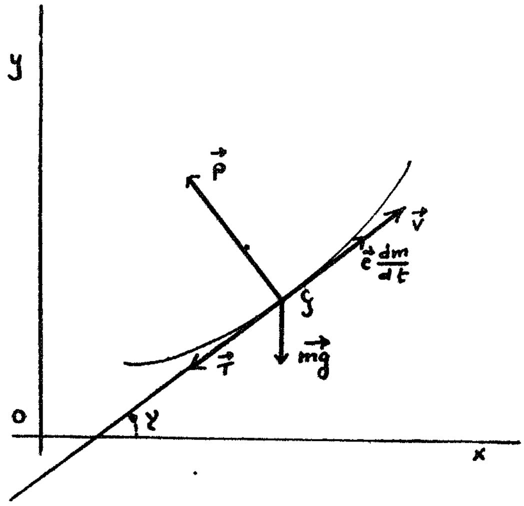

Figura 3.

Estos valores de C_T y C_P son calculados experimentalmente y a medida que aumenta la velocidad se demuestra que las acciones aerodinámicas dependen cada vez en mayor grado de la relación $\frac{v}{v_0}$ llamada numero de Mach o «mach» simplemente, es decir, que ya no pueden ser consideradas dichas fuerzas como proporcionales a v^2.

A la disipación de energía debida a los razonamientos viscosos y a las estelas de torbellinos viene a sumarse la onda balística que acompaña a un avión supersónico en la exigencia de trabajo necesario para su sostenimiento; el suministro de este trabajo lleva consigo un aumento de las fuerzas resistentes.

Ecuaciones del movimiento

Como en el caso de un aparato ordinario, siguiendo al profesor J. M. J. Kooy, vamos a distinguir dos casos de vuelo ascendente, es decir:

a) Cuando la «fuerza de reacción de los gases» conserva una dirección constante, o sea cuando el ángulo $\varphi = k$.

b) Cuando el ángulo de incidencia α es constante.

a) Si proyectamos la ecuación vectorial (1) según los ejes intrínsecos tendremos sobre la tangente y sobre la normal, respectivamente, las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= -mg \operatorname{sen}\gamma - C_T S\frac{\rho v^2}{2} - c\cdot\frac{dm}{dt}\cdot\cos(\varphi-\gamma) \\ m\frac{v^2}{R} &= -mg\cos\gamma + C_P S\frac{\rho v^2}{2} - c\cdot\frac{dm}{dt}\operatorname{sen}(\varphi-\gamma) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

en donde R es por definición el radio de curvatura y, por consiguiente,

$$R = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{v}{\dfrac{d\varepsilon}{dt}} = \frac{v}{\dfrac{d\gamma}{dt}}$$

y, por tanto,

$$\frac{v}{R} = \frac{d\gamma}{dt}$$

puesto que el ángulo ε formado por dos tangenes infinitamente próximas es igual a la diferencia de los ángulos γ y $\gamma + \Delta\gamma$ que las dos tangentes forman con el eje horizontal.

La masa m debe ser considerada como función del tiempo. Tendremos, pues:

$$m = f(t)$$

$$\frac{dm}{dt} = f'(t)$$

con lo que las ecuaciones (2) se transformarán en

$$\left.\begin{aligned} f(t) \cdot \frac{dv}{dt} &= -f(t) \cdot g \operatorname{sen} \gamma - C\sigma\rho \frac{Sv^2}{2} - c \cdot f'(t) \cdot \cos(\varphi - \gamma) \\ f(t)v \cdot \frac{d\gamma}{dt} &= -f(t) \cdot g \cos \gamma + C_P\rho \frac{Sv^2}{2} - c \cdot f'(t) \cdot \operatorname{sen}(\varphi - \gamma) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

en donde v y γ son variables dependientes y el tiempo t la variable independiente, habiendo obtenido un sistema de ecuaciones diferenciadas simultáneas de primer orden, cuya integración numérica podría llevarse a cabo por cualquiera de los métodos que se emplean ordinariamente como los de Taylor, Runge-Kutta, etc.

Naturalmente habría que partir de unas condiciones iniciales dadas y aplicando los esquemas, por ejemplo, de Runge-Kutta se llegaría por sucesivos pasos de integración a obtener v y γ como funciones del tiempo:

$$v = v(t)$$
$$\gamma = \gamma(t)$$

Ahora bien, si tomamos un sistema de ejes (o, x, y) tal que el ox sea la horizontal y el oy la vertical ascendente situado en el plano del movimiento (fig. 2) podremos fácilmente determinar las otras coordenadas del avión-cohete, es decir, la distancia horizontal y la altura a que se encuentra. En efecto: los componentes de la velocidad segun estos ejes son:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos \gamma$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v \operatorname{sen} \gamma$$

y, por tanto, mediante una primera integración obtendremos las coordenadas del avión:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t v \cos \gamma \cdot dt + x_0 \\ y &= \int_0^t v \operatorname{sen} \gamma \cdot dt + y_0 \end{aligned} \qquad (4)$$

en donde por supuesto las v y γ bajo el signo integral, son funciones del tiempo ya calculadas por la integracion de las ecuaciones diferenciales del movimiento. Es decir que el problema lo tendremos resuelto mediante las siguientes cuatro funciones del tiempo·

$$v = v(t) \quad ,, \quad x = x(t)$$
$$\gamma = \gamma(t) \quad ,, \quad y = y(t)$$

No hace falta añadir que tambien las integrales (4) deberan ser calculadas numéricamente. lo cual ofrece hoy día pocas dificultades con las modernas calculadoras electrónicas.

b) Si el ángulo de incidencia o de ataque es constante, los angulos que ahora serán variables son los γ y φ. Sustituyendo entonces

$$\varphi - \gamma = \alpha - \varkappa$$

en las ecuaciones (3) obtendremos como ecuaciones diferenciales del movimiento para el vuelo ascendente con ángulo de ataque constante las siguientes:

$$f(t) \cdot \frac{dv}{dt} = - f(t)\, g \operatorname{sen} \gamma - C_T S \cdot \frac{v^2}{2} - cf'(t) \cos (\alpha - \varkappa)$$

$$f(t)\, v \frac{dy}{dt} = - {}^3(t)\, g \cos \gamma + C_P S \cdot \frac{\rho v^2}{2} - cf'(t) \operatorname{sen} (\alpha - \varkappa)$$

$$x = \int_0^t v \cdot \cos \gamma \cdot dt + x_0$$

$$y = \int_0^t v \cdot \operatorname{sen} \gamma \cdot dt + y_0$$

que, como en el caso *a)*, nos resolverán plenamente el problema al proporcionarnos la velocidad v, el ángulo γ que forma la dirección de la velocidad con la horizontal, la distancia x sobre la horizontal y la cota y como funciones del tiempo.

Finalmente insistimos una vez más en que hemos hecho una serie de concesiones; entre otras, el no tener en cuenta que la densidad del aire (ρ) y la aceleración de la gravedad (g) varían con la altura (y); que si nos aproximamos a la velocidad del sonido no nos es permitido admitir que las fuerzas aerodinámicas son proporcionales al cuadrado de la velocidad, y, por lo tanto, los coeficientes C_T C_P son funciones del ángulo de ataque α y de la velocidad v.

Por último, y para terminar, puesto que para la masa m hemos supuesto únicamente que era función del tiempo, añadiremos que como leyes de variación de masa se toman en ocasiones las siguientes:

$$m = m_0 - \mu t$$

$$m = m_0 \cdot e^{-\mu t}$$

en donde μ representa una constante real positiva.

MATEO F. CHICARRO.

BIBLIOGRAFIA

I. J. M. J. KOOY: *Ballistics of the future.* (H. Stam. Harlem.)

II. VICEALMIRANTE P. BARJOT: *Perspectivas de la potencia aérea en* 1958. («Revue Maritime»).

III. GENERAL DE AVIACIÓN A. RUEDA URETA: *Las armas modernas en tierra, mar y aire y su influencia en el futuro.* («Revista General de Marina». Septiembre, 1958.)

IV. GEORGES BRUHAT: *Cours de Physique Général Mecanique.* (París, 1955.)

V. A. C. CLARKE: *The Exploration of Space.* Nueva York, 1957.

VI. M. F. CHICARRO: *El cohete a la Luna.* («Revista General de Marina» Abril, 1958.)