DIVULGACION

APROXIMACION DE LAS RAICES REALES DE LOS SISTEMAS DE DOS ECUACIONES TRASCENDENTES

por

ENRIQUE S-PALENCIA SERRANO

Sea el sistema de dos ecuaciones $\begin{cases} f(xy) = 0 \\ \varphi(xy) = 0 \end{cases}$ que cumple las siguientes hipótesis:

1.ª Existe un dominio en el cual cada una de las ecuaciones $f(xy) = 0$ y $\varphi(xy) = 0$ define a y como función derivable dos veces de x, a las que llamaremos $y = F(x)$ e $y = \Phi(x)$ respectivamente (1).

2.ª Tiene una raíz real simple $(\alpha\beta)$ acotada en un recinto $a < \alpha < b$; $c < \beta < d$, perteneciente al dominio de la hipótesis 1.ª, en el que no hay *ninguna otra raíz*.

3.ª $F'(x) - \Phi'(x)$ y $F''(x) - \Phi''(x)$ no se anulan ni cambian de signo en el intervalo (ab).

Si $(\alpha\beta)$ satisface al sistema $\begin{cases} f(xy) = 0 \\ \varphi(xy) = 0 \end{cases}$ también verificará al $\begin{cases} y = F(x) \\ y = \Phi(x) \end{cases}$ y al $\begin{cases} y = F(x) \\ F(x) - \Phi(x) = 0 \end{cases}$, luego α será raíz de la ecuación $F(x) - \Phi(x) = 0$, acotada en el intervalo (ab) en el que es aplicable el método de aproximación mixto de Newton y Regula Falsi (2).

En lo sucesivo, y con objeto de referirnos a las figuras, supondremos que es $F''(x) - \Phi''(x) < 0$ en el intervalo (ab), $F(a) - \Phi(a) < 0$ y $F(b) - \Phi(b) > 0$ (fig. 1). En caso contrario se haría el razonamiento análogamente.

Para trazar la tangente a la curva $y = F(x) - \Phi(x)$ en el punto $[a, F(a) - \Phi(a)]$, y la cuerda que pasa por los $[a, F(a) - \Phi(a)]$ y $[b, F(b) - \Phi(b)]$, cuyas intersecciones con el eje X nos darán dos puntos, a la izquierda y a la derecha respectivamente de α, será necesario conocer $F(a) - \Phi(a)$, $F(b) - \Phi(b)$ y $F'(a) - \Phi'(a)$.

Si se substituyen $x = a$ y $x = b$ en $f(xy) = 0$ y $\varphi(xy) = 0$ se obtendran, por cualquiera de los métodos de aproximación de raíces de ecuaciones trascendentes:

$$f(ay) = 0 \longrightarrow F(a) \quad ; \quad \varphi(ay) = 0 \longrightarrow \Phi(a)$$
$$f(by) = 0 \longrightarrow F(b) \quad ; \quad \varphi(by) = 0 \longrightarrow \Phi(b)$$

Restando $F'(x)$ y $\Phi'(x)$, obtenidas derivando con respecto a x las funciones implícitas $f(xy) = 0$ y $\varphi(xy) = 0$, se tiene:

$$F'(x) - \Phi'(x) = -\frac{f'_x(xy)}{f'_y(xy)} + \frac{\varphi'_x(xy)}{\varphi'_y(xy)} = -\frac{f'_x[x,\ F(x)]}{f'_y[x,\ F(x)]} + \frac{\varphi'_x[x,\ \Phi(x)]}{\varphi'_y[x,\ \Phi(x)]}$$

luego:

$$F'(a) - \Phi'(a) = -\frac{f'_x[a,\ F(a)]}{f'_y[a,\ F(a)]} + \frac{\varphi'_x[a,\ \Phi(a)]}{\varphi'_y[a,\ \Phi(a)]} \qquad [E]$$

Notemos que los valores de $F(a)$, $F(b)$, $\Phi(b)$, $\Phi(a)$ y como consecuencia los de $F(a) - \Phi(a)$, $F(b) - \Phi(b)$ y $F'(a) - \Phi'(a)$ no se conocen exacta, sino sólo aproximadamente, es decir, de cada uno de ellos se sabe únicamente que está en un cierto intervalo. El método más rápido para calcular el extremo superior M del correspondiente a $F'(a) - \Phi'(a)$ será substituir en la expresión [E], $F(a)$ y $\Phi'(a)$ cada vez que aparezcan por sus cotas superiores o inferiores con objeto de obtener un número $M > F'(a) - \Phi'(a)$, y lo mismo para el inferior m.

No es posible, por tanto, trazar la tangente ni la cuerda; no obstante, si se considera la recta de pendiente M que pasa por el punto (aA), siendo (AB) el intervalo en que se tiene acotado $F(a) - \Phi(a)$ (fig. 1) y

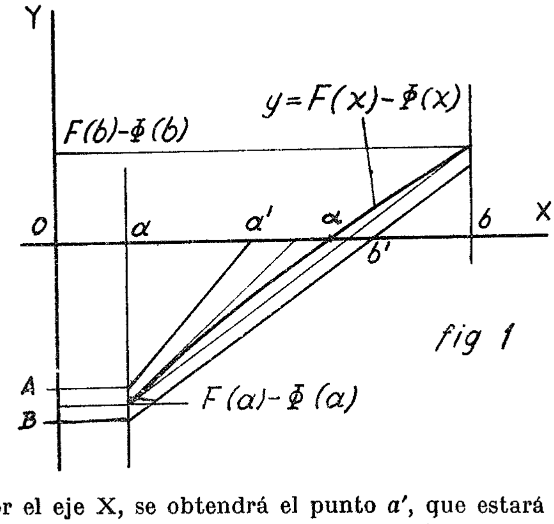


fig 1

se corta por el eje X, se obtendrá el punto a', que estará situado a la izquierda del de intersección de la tangente y a la derecha de a.

Análogamente, si se traza la recta que pasa por los puntos de abscisas a y b y de ordenadas los extremos inferiores de los intervalos en que están acotados $F(a) - \Phi(a)$ y $F(b) - \Phi(b)$ y se halla su intersección con $y = 0$, encontraremos el punto b', a la izquierda de b y a la derecha del de corte de la cuerda, luego será:

$$a' < \alpha < b' \quad \text{siendo} \quad |b' - a'| < |b - a|$$

Este proceso puede repetirse tantas veces como sea necesario para obtener α con la aproximación deseada. En efecto, si se tiene una sucesión numerable de intervalos de longitudes $l_1 > l_2 > l_3 > \ldots > l_n > \ldots$ no existe en general razón para que sea $\lim_{n \to \infty} l_n = o$; sin embargo, si se calculan $F(a)$, $\Phi(a)$, etc., con la suficiente aproximación, puede lograrse que a' y b' estén tan cerca como queramos de los puntos de corte del eje X con la tangente y la cuerda, y como la longitud de los segmentos determinados por dichos puntos tiende a o (3), también tendrá límite o la sucesión $|b - a|$, $|b' - a'|$, $|b'' - a''|$, ..

Puede también aproximarse α por el método de Newton (4), aunque en este caso será necesario conocer una cota del error cometido.

En la figura 2 están representados: 1.º La curva y su tangente en

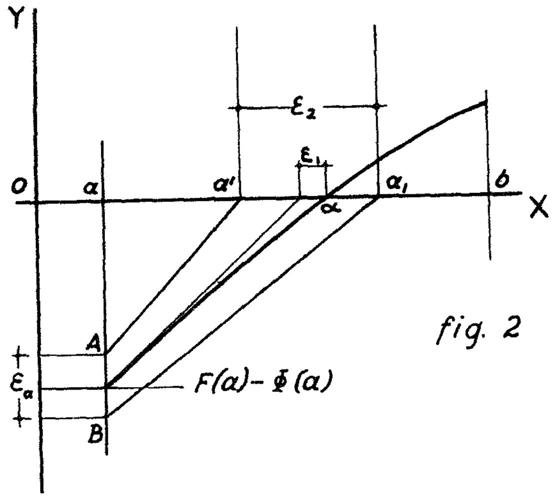


fig. 2

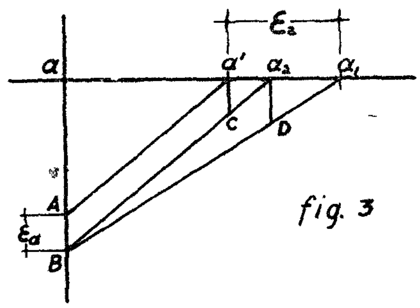
el punto $[a, F(a) - \Phi(a)]$. 2.º La recta $\overline{Aa'}$ que pasa por (aA) y de pendiente M. 3.º La recta $\overline{Ba_1}$ que pasa por (aB) y cuyo coeficiente angular es m. Llamando ε_α a $|a' - \alpha|$, ε_1 al error cometido al sustituir la curva por la tangente, ε_2 a $|a_1 - a'|$ y ε_a a $|A - B|$, como la tangente pasa por un punto entre A y B y su pendiente es menor que M y mayor que m, cortará el eje X en un punto situado entre a' y a_1, luego $|\varepsilon_\alpha| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$.

Si se conociera una cota superior k del módulo de $F''(x) - \Phi''(x)$ en el intervalo (ab), se tendría

$$\varepsilon_1 < \frac{(b-a)^2 k}{2\,|F'(a) - \Phi'(a)|} \qquad (5)$$

Para calcular ε_2 consideremos la figura 3, donde se han esquematizado $\overline{Aa'}$, $\overline{Ba_1}$ y $\overline{Ba_2}$, que es la paralela a $\overline{Aa'}$ por B. Se tendrá:

$$|a_2 - a'| = |A - B|\,\frac{|a' - a|}{|A|} = \left|\frac{\varepsilon_a}{M}\right|$$



y también:

$$|a_1 - a_2| = \frac{\overline{a_2 D}}{m}\ ;\ \overline{a_2 D} = |a - a_2|\ |M - m| =$$
$$= \left(|a' - a| + \left|\frac{\varepsilon_a}{M}\right|\right) \cdot |M - m|\ ;$$

luego

$$|\varepsilon_2| = |a_2 - a'| + |a_1 - a_2| = \left|\frac{\varepsilon_a}{M}\right| +$$
$$+ \left(|a' - a| + \left|\frac{\varepsilon_a}{M}\right|\right) \cdot \left|\frac{M - m}{m}\right|$$

de donde

$$|\varepsilon\alpha| = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| <$$
$$< \frac{(b-a)^2\,k}{2m} + \left|\frac{\varepsilon_a}{M}\right| + \left(|a' - a| + \left|\frac{\varepsilon_a}{M}\right|\right) \cdot \left|\frac{M - m}{m}\right|$$

Una vez aproximado α, es decir, acotado entre a_n y b_n, para calcular β se corta (fig. 4) la curva $f(xy) = o$ por $x = a_n$ y se aproxima la raíz de la ecuación $f(a_n y) = o$, acotándola entre γ y $\gamma + \varepsilon'$; como $\varepsilon_\alpha = |b_n - a_n|$ es pequeño, la curva, entre los puntos de abscisa a_n y b_n estará comprendida entre las dos paralelas a la tangente en el punto $[a_n, F(a_n)]$ trazadas por los (a_n, γ) y $(a_n, \gamma + \varepsilon')$, luego se tendrá

$$\gamma < \beta < \gamma + \varepsilon' + \varepsilon_\alpha \left| \frac{-f'_x(a_n \beta)}{f'_y(a_n \beta)} \right|$$

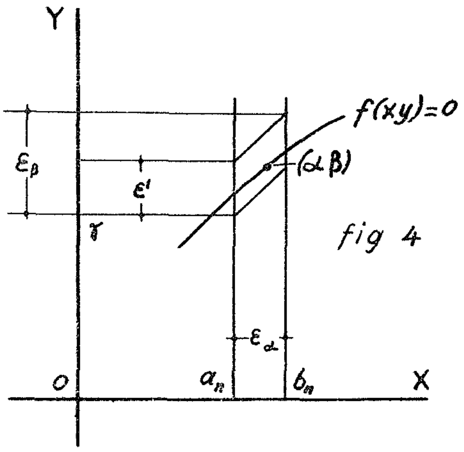


fig 4

El cálculo de β podía haberse hecho también en la curva $\varphi(xy) = o$ en lugar de la $f(xy) = o$; con objeto de que el error sea el menor posible se usará aquella cuya pendiente en $(\alpha\beta)$ sea menor.

Ejemplo: Aproximar la raíz más cercana al punto (1 3) del sistema

$$\begin{cases} x + \mathrm{Th}x - y + \mathrm{L}y = 0 & \equiv f(xy) = 0 \\ 9 \operatorname{sen}(x + y) + xy = 0 & \equiv \varphi(xy) = 0 \end{cases}$$

Primeramente se dibujan las dos curvas en las proximidades del punto pedido (fig. 5) y acotamos $0{,}6 < \alpha < 1$ cortando $f(xy) = 0$ y $\varphi(xy) = 0$ por $x = 0{,}6$ y $x = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} x &= 0{,}6 \longrightarrow 1{,}6179 < F(0{,}6) < 1{,}622 \\ x &= 1 \longrightarrow 2{,}7862 < F(1) < 2{,}7864 \\ x &= 0{,}6 \longrightarrow 2{,}724 < \Phi(0{,}6) < 2{,}7243 \\ x &= 1 \longrightarrow 2{,}4129 < \Phi(1) < 2{,}4132 \end{aligned}$$

luego

$$-1{,}1064 < F(0{,}6) - \Phi(0{,}6) < -1{,}102$$
$$0{,}373 < F(1) - \Phi(1) < 0{,}3735$$

$F''(x) - \Phi''(x)$ resulta ser negativa en el intervalo, $F(0{,}6) - \Phi(0{,}6) < 0$ y $F(1) - \Phi(1) > 0$, luego el esquema es el de la figura 1.

$$F'(0{,}6) - \Phi'(0{,}6) = -\frac{f'_x[0{,}6\ ,\ F(0{,}6)]}{f'_y[0{,}6\ ,\ F(0{,}6)]} + \frac{\varphi'_x[0{,}6\ ,\ \Phi(0{,}6)]}{\varphi'_y[0{,}6\ ,\ \Phi(0{,}6)]} =$$

$$= -\frac{1 + \dfrac{1}{ch^2 x}}{-1 + \dfrac{1}{y}} + \frac{9\cos(x+y) + y}{9\cos(x+y) + x} \qquad [E]$$

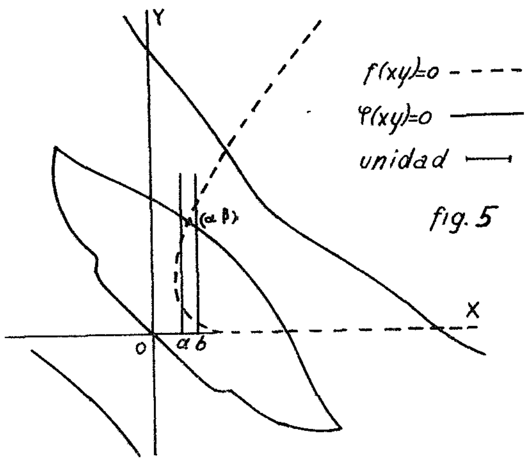


fig. 5

tomando $F(0{,}6)$ y $\Phi(0{,}6)$ en cada caso, tales que se obtenga $M > E$, es $M = 5{,}213$; se traza la recta que pasa por $[0{,}6\ ,\ 1{,}102]$ de pendiente 5,213 y se corta por el eje X, teniéndose

$$|a - a'| = \frac{1{,}102}{5{,}213} = 0{,}21$$

y en sustitución de la cuerda, la recta que une los puntos $[0{,}6, -1{,}1064]$ y $(1\ ,\ 0{,}373)$ y se tendrá

$$\frac{|b' - a|}{1{,}1064} = \frac{1 - 0{,}6}{0{,}373 + 1{,}1064} \rightarrow |b' - a| = 0{,}3$$

luego α está comprendido entre $0{,}6 + 0{,}21$ y $0{,}6 + 0{,}3$.

Repitiendo el mismo proceso en este intervalo:

$$2{,}3219 < F(0{,}81) < 2{,}3222 \;;\; 2{,}554 < F(0{,}9) < 2{,}5542$$
$$2{,}561 < \Phi(0{,}81) < 2{,}564 \;;\; 2{,}487 < \Phi(0{,}9) < 2{,}492$$

luego

$$-0{,}2421 < F(0{,}81) - \Phi(0{,}81) < -0{,}2388$$
$$0{,}052 < F(0{,}9) - \Phi(0{,}9) < 0{,}0772$$

Para la cuerda emplearemos

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0{,}81) - \Phi(0{,}81) = -0{,}2421 \\ F(0{,}9) - \Phi(0{,}9) = 0{,}052 \end{array} \right\}$$

de donde

$$\frac{|b' - b''|}{0{,}09} = \frac{0{,}2421}{0{,}2421 + 0{,}052} \rightarrow |b' - b''| = 0{,}074$$

y para la tangente

$F(0{,}81) - \Phi(0{,}81) = -0{,}2388$ y $F'(0{,}81) - \Phi'(0{,}81) = 3{,}53$; luego

$$|a' - a''| = \frac{0{,}2388}{3.53} = 0{,}0675$$

obteniéndose $0{,}8775 < \alpha < 0{,}884$ $(\varepsilon_\alpha < 0{,}0065)$.

Para calcular β se toma la curva $\varphi(xy) = 0$ por ser la que tiene pendiente de menor módulo en el intervalo considerado, y se tendrá: $2'5062 < \Phi\,(0'884) < 2'5063$; $\Phi'(x)$ en este punto es menor que $0'8$, y como se tenía $\varepsilon_\alpha = 0'0065$ será: $2'5062 < \beta < 2'5062 + 0'8 \cdot \varepsilon_\alpha + 0'0001$.

Luego la raíz pedida es:

$$0'8775 < \alpha < 0'884 \quad (\varepsilon_\alpha < 0'0065)$$
$$2'5062 < \beta < 2'5115 \quad (\varepsilon_\beta < 0'0053)$$