EL FÉNOMENO BIOLOGICO DE LA LUCHA POR LA EXISTENCIA, LA ESTABILIDAD DE LA ECONOMIA CAPITALISTA Y LA PREDICCION DE LA LEY DE PARETO

por

DARÍO MARAVALL CASESNOVES

Existen sorprendentes analogías entre fenómenos biológicos y económicos, tales como, por ejemplo, el de la lucha por la existencia de la biocinética y la competencia industrial de la economía capitalista, o la necesidad de un espacio vital para los seres vivos y las ideas filosóficas de los nazis. Algunas de estas ideas no están lo suficientemente maduras para poder tomar forma matemática, pero otras sí, y sin pretender dogmatizar en economía, ensayamos en este artículo extender de la biología a la economía el tratamiento matemático expuesto en mi anterior artículo en esta misma revista (t. IX, núms. 6 y 7) titulado: «Sobre la estabilidad del equilibrio definido por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y su interés en biología». Por otra parte ya me he ocupado anteriormente de este tema, en un artículo publicado en el *Boletín de la Asociación de Ingenieros Agrónomos* (número 43, 1953) titulado: «Teoría matemática de la estabilidad de la economía capitalista».

Es un hecho que un amplio sector de economistas, inspirándose en las ideas de Marx, admiten que como consecuencia de la estructura interna de la economía capitalista, se produce en el transcurso del tiempo una disminución del número de pequeños capitalistas que pasan a engrosar la clase proletaria, fenómeno que a la larga produce el colapso de la economía capitalista. A este fenómeno me parece que se le podría denominar la «muerte por proletarización del capitalismo», por analogía con el fenómeno físico descubierto por aquel entonces, que inspira las directrices de la filosofía natural de la segunda mitad del siglo XIX: «la muerte térmica del universo», consecuencia del segundo principio de la termodinámica. Es muy posible que Marx no pudiera sustraerse a al influencia de las ideas filosóficas implícitas en ese gran principio de su tiempo.

Es claro que de no ser cierta la creencia de estos economistas, a menos de que cometiesen un error muy grosero (cosa poco probable), entonces el fenómeno de la concentración del capital ha de ser una onda larga de Kondratieff.

Me parece que el problema de la estabilidad de la economía capitalista debe de plantearse en los siguientes términos: agrupadas las personas económicas en «clases», el tamaño de éstas (o número de personas que las componen) satisfacen ecuaciones diferenciales del tipo:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1}$$

si no hay herencia, y ecuaciones integrodiferenciales si la hay. Así es que si no hay aniquilación de unas clases por otras el tamaño de ellas ha de fluctuar alrededor de valores medios, siendo, por tanto, equivalente desde el punto de vista matemático este problema al que he tratado en el caso de las asociaciones biológicas (ver mi artículo antes citado, en esta misma revista). Si, por ejemplo, nos limitamos al caso particular de dos clases económicas, pequeños y grandes capitalistas, cuyos números vamos a designar por x e y, las ecuaciones (1) linealizadas de acuerdo con la técnica del artículo a que antes hice referencia, son en este caso:

$$x' = f_{11}\, x + f_{12}\, y \quad ; \quad y' = f_{21}\, x + f_{22}\, y \tag{2}$$

y la correspondiente ecuación en p:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - p & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - p \end{vmatrix} = p^2 - p(f_{11} + f_{22}) + f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} = 0. \tag{3}$$

Las condiciones que aseguran la estabilidad del equilibrio, es decir, que las raíces de (3) tienen sus partes reales negativas o nulas, son:

$$-\alpha = f_{22} + f_{22} \leqslant 0 \quad ; \quad f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} \geqslant 0 \tag{4}$$

si además de (4), se cumple que

$$-4\, w^2 = (f_{11} - f_{22})^2 + 4 f_{12} f_{21} \leqslant 0 \tag{5}$$

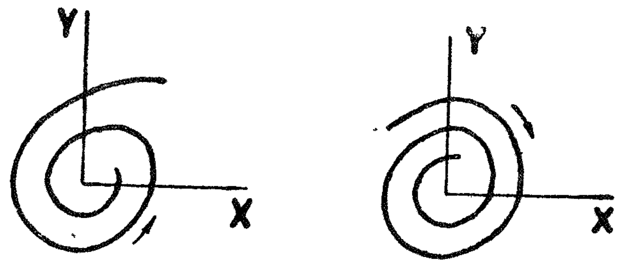
lo que exige necesariamente que f_{12} y f_{21}, sean de distinto signo, entonces x e y se comportan de manera oscilante. Son de la forma:

$$x = \mathrm{A} e^{\alpha - t} \cos wt \quad ; \quad y = \mathrm{B} e^{\alpha - t} \cos (wt + \varphi) \tag{6}$$

en la que A, B y φ, vienen determinados sin dificultad alguna, por los valores iniciales de x e y, y por la condición de que x e y cumplan (2). Como el origen del tiempo lo podemos tomar cualquiera, y φ aumentarlo en π a voluntad, es por lo que hemos tomado la forma particular (6) con A y B positivos.

Por tanto x e y, varían sinusoidalmente, con amortiguamiento exponencial en el tiempo, y el punto (x, y) describe una espiral de las formas indicadas en la figura, asintóticas al punto O, o las simétricas de éstas respecto a cualquiera de los ejes. Pudiendo ser el sentido del recorrido el de las agujas del reloj o el contrario. El que sea la espiral de la figura o la simétrica es indiferente para las conclusiones que vamos a deducir, no así el sentido del recorrido.

A lo largo de cada ciclo o período $2\pi/w$, se pueden distinguir cuatro fases, correspondientes a los arcos de espiral comprendidos entre puntos consecutivos de tangente vertical y horizontal.



Estas cuatro fases son:

A) Disminuye el número de pequeños capitalistas y aumenta el número de los grandes, es una fase de concentración del capital.

B) Disminuyen simultáneamente los números de grandes y de pequeños capitalistas, es una fase de depresión económica.

C) Aumenta el número de pequeños capitalistas y disminuye el número de los grandes, es una fase de dispersión del capital.

D) Aumentan simultáneamente los números de grandes y pequeños capitalistas, es una fase de prosperidad económica.

Según sean los valores de φ, lo cual como veremos más adelante depende de los signos de f_{12} o f_{21}, se tiene para el signo de las derivadas de x e y, orden de sucesión de las fases económicas, y sentido del recorrido de la espiral de la figura, o su simétrica, el siguiente cuadro resumen:

$\pi < \varphi < 2\pi$				$0 < \varphi < \pi$			
x'	y'	Fase	Sentido	x'	y'	Fase	Sentido
—	+	A		—	—	B	
—	—	B		—	+	A	
+	—	C		+	+	D	
+	+	D		+	—	C	

Se da el primer caso ($\circlearrowleft$) o el segundo ($\circlearrowright$), según el signo de f_{21}, que es distinto siempre del de f_{12}, en virtud de (5). Si $f_{21} < 0$, el sentido del recorrido de la espiral es el contrario al de las agujas del reloj (primer caso), y si $f_{21} < 0$ entonces el sentido del recorrido es el de las agujas de reloj (segundo caso). Porque, por ejemplo, en el punto de corte del eje positivo de las x, con la espiral, por (2) es $y' = f_{21}x$, con x positivo, luego y crece o decrece según que f_{21} sea mayor o menor que cero. Si $\alpha = 0$, las espirales se convierten en elipses.

Con la terminología que hemos adoptado en el caso de las asociaciones biológicas, si f_{21} es mayor que cero y f_{12}, por tanto, menor que cero, y es parásito de x, mientras que x presenta parasitismo negativo frente a y, empleando un símil biológico se puede decir que los grandes capitalistas «devoran» a los pequeños. Esta hipótesis que es la que conduce al primer caso (orden de sucesión de las fases económicas: A, B, C, D), es el que se da en la práctica con las hipótesis de Marx, que parecen las más razonables, pero obsérvese que en ese caso a la fase de concentración del capital, sucede la fase de depresión económica, ello unido a que la elipse sea muy achatada, es decir, que el período de recorrido de un ciclo sea muy largo, puede inducir al error de la creencia en el fenómeno monotónico de la concentración del capital, y del colapso de la economía capitalista como consecuencia de la proletarización de los pequeños capitalistas.

Por tanto, siempre que se cumplan las condiciones (4) y (5), el fenómeno de la concentración del capital no es monotónico como creía Marx, sino que los números de grandes y pequeños capitalistas oscilarán alrededor de sus valores medios. En estas condiciones la economía capitalista pasa alternativamente por períodos de depresión y prosperidad, está dotada de estabilidad y para que se rompa esta estabilidad es preciso una presión extraña al mundo de la economía, al igual que sucede con el sistema planetario solar que es estable, y únicamente una conmoción extraña al mismo, puede romper esta estabilidad, como puede ser el choque con un astro. En el caso económico la estabilidad puede romperse, pongo por caso, como consecuencia de la desesperación de las clases proletarias en la fase de depresión económica. En cierto modo se puede decir que no es la economía el motor de las grandes conmociones históricas, sino que por el contrario son las presiones extraeconómicas las que pueden determinar la ruptura violenta del equilibrio de la economía capitalista.

Al igual que en el caso biológico, la herencia no modifica estas ideas, sino simplemente la técnica matemática (véase mi memoria en la *Revista de la Academia de Ciencias*, t. L, 1956 «Nuevos tipos de ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales. Nuevos fenómenos de oscilación»).

Fréchet en su obra, *Les Mathématiques et le Concret* (edit. Presses Universitaires, 1955), en la página 312 afirma: «La ley de Pareto..., ofrece de curioso que se aplica también a un gran número de fenómenos

económicos y sociales, e incluso a ciertos fenómenos físicos o biológicos» y en la página 314: «la ley de Pareto no ha sido predicha». En esta misma obra entre los numerosos ejemplos de encuentros empíricos de la ley de Pareto, aparte del muy conocido de las distribuciones de las rentas, señala el de Auerbach en la clasificación de pueblos según el número de habitantes, de Estouf, Joos y Van Tieghem en la clasificación de palabras con arreglo a sus frecuencias en obras literarias, de Kovacs y el propio Fréchet en la distribución de ciertas magnitudes geográficas (ríos según sus longitudes, islas según sus superficies, montañas según sus alturas).

Quiero señalar que sustituyendo el tiempo aleatorio t en que se realiza el enésimo suceso en un proceso de Furry, por la nueva variable $e^{\lambda t}/(e^{\lambda t} - 1)$, en la que λ es el parámetro del proceso de Furry, he encontrado que esta nueva variable sigue la ley de Pareto.

En un artículo que he publicado en el *Boletín de la Asociación de Ingenieros Agrónomos* (núm. 53, 1954) titulado: «Aplicaciones de los procesos estocásticos, a la demografía, la biometría y la electrodinámica» he expuesto un método que me es propio, que permite la predicción teórica de la ley de Pareto. Es el siguiente: Designemos por $f(x, t)$ la probabilidad de que en el tiempo t, la variable aleatoria ξ, que solamente puede tomar valores positivos, y que en el tiempo varía de manera monótona no decreciente, esté comprendida entre x y $x + dx$, y por $\varphi(x, t)dt/dx$, la probabilidad de que en el intervalo infinitesimal dt, ξ pase a estar comprendida entre $x + dx$ y $x + 2dx$. Entonces por las reglas de las probabilidades totales y compuestas es:

$$f(x + dx, t + dt) = f(x + dx, t) \left[1 - \varphi(x + dx, t) \frac{dt}{dx}\right] + \\ + f(x, t)\, \varphi(x, t) \frac{dt}{dx} \tag{7}$$

de la que se deduce:

$$\frac{\delta f(x, t)}{\delta t} = - \frac{\delta}{\delta x} [f(x, t)\, \varphi(x, t)] \tag{8}$$

que rige la difusión de la probabilidad en esta clase de fenómenos en sustitución de la ecuación de Fokker-Planck.

El hecho de que admitimos como hipótesis que la variable ξ tiene flecha en el mismo sentido que el tiempo, es decir que para alcanzar cualquier valor lo ha de hacer por la izquierda siempre, es el determinante de que la ecuación entre derivadas parciales (8) sea de primer orden. Esto es aplicable a casi todos los caracteres de la biometría.

En el caso en que $\varphi(x, t)$ es igual a una constante c, entonces (8) admite como solución (integrando mediante separación de variables) a:

$$f(x, t) = a^2 e^{-a^2(x-ct)} \quad ; \quad x \geqslant ct \tag{9}$$

en la que α es una constante. Representa (9) una ley exponencial, cuyo origen varía linealmente con el tiempo.

Si $\varphi(x, t) = c \cdot x$, entonces (8) admite como solución (integrando también mediante separación de variables) a:

$$f(x, t) = \frac{a^2 e^{a^2 ct}}{x_0} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-(a^2+1)} \quad ; \quad x \geqslant x_0 e^{ct} \qquad (10)$$

que es una ley de Pareto en la que el valor mínimo varía exponencialmente con el tiempo.

Vemos, por tanto, que la exponencial (9) como la ley de Pareto (10) son previsibles teóricamente a partir de (8), desempeñan estas leyes con relación a dicha ecuación, por tanto, respecto a variables monótonas no decrecientes, el mismo papel que la ley normal respecto a la ecuación del calor, que como es sabido rige la difusión de la probabilidad de variables que pueden crecer o decrecer con el tiempo.

Entre otras leyes de interés econométrico que son solución de (8) y por tanto previsibles por esta ecuación en derivadas parciales figura la logarítmico-normal.

NOTA.—La editorial americana Globo prepara la publicación de dos obras mías sobre *Teoría y aplicaciones de las oscilaciones* y *Teoría y aplicaciones de los procesos estocásticos* en las que pueden consultarse lo aquí tratado. Y en España la editorial Dossat la titulada: *Ingeniería de las Oscilaciones.*