SOBRE LA RESOLUCION DE LA ECUACION CUARTICA

por

JUAN TORRES NOGUERA

La ecuación de cuarto grado

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

después de reducida se puede escribir

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \qquad [I]$$

o también

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 + qx + \frac{4r - p^2}{4} = 0$$

Pero esta ecuación resulta de la eliminación de Y en el sistema

$$\left.\begin{aligned} y^2 + qx + \frac{4r - p^2}{4} &= 0 \\ x^2 + \frac{p}{2} &= y \end{aligned}\right\} \qquad [II]$$

cuyas ecuaciones son las de dos parábolas en coordenadas cartesianas rectangulares. Luego, el problema de obtener las raíces de la ecuación [I] se transforma en el de hallar las abscisas de las intersecciones de las parábolas [II].

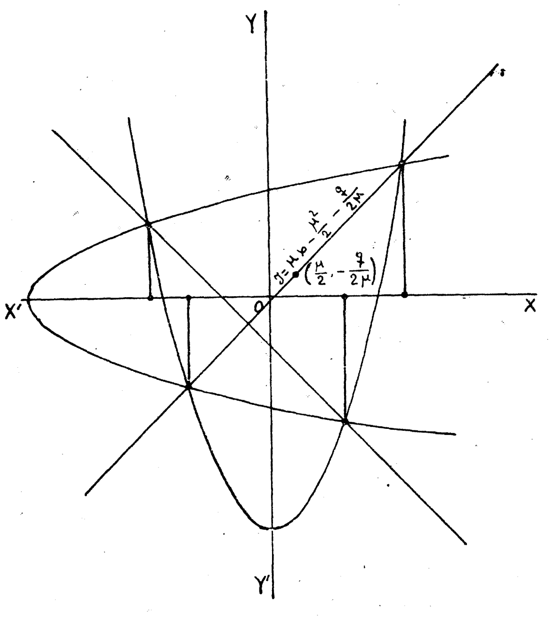
Consideremos ahora el haz de cónicas de parámetros u que definen las parábolas

$$y^2 + qx + \frac{4r - p^2}{4} - 4u\left(x^2 - y + \frac{p}{2}\right) = 0 \qquad [III]$$

y determinemos las cónicas degeneradas del mismo. Para ello deberemos resolver la ecuación de tercer grado en u, que resulta de igualar a cero el determinante de los coeficientes de la cónica genérica [III]:

$$u^3 + \frac{p}{2} u^2 + \frac{p^2 - 4r}{16} u - \frac{q^2}{64} = 0 \quad [IV]$$

que es la resolvente de la ecuación [I]. Las raíces u_1, u_2, u_3 de dicha resolvente son los valores del parámetro u para los que corresponden cónicas degeneradas del haz [III]. Los coeficientes angulares de las rectas que forman dichas cónicas se deducen de la ecuación del haz considerado, resultando ser los duplos de las raíces cuadradas de las soluciones u_1, u_2, u_3 de la resolvente; es decir, $\pm\ 2\sqrt{u_1}$ $\pm\ 2\sqrt{u_2}$ $\pm\ 2\sqrt{u_3}$. Un punto de cada una de estas rectas, que sirve para completar su determinación, puede ser el punto medio de las cuerdas comunes a las parábolas aludidas; es decir, que la recta componente de una cónica degenerada de coeficiente angu-



lar μ pasará por el punto de coordenadas $\left(\frac{\mu}{2}, -\frac{q}{2\mu}\right)$ y se tendrá para la recta la ecuación

$$y = \mu x - \frac{\mu^2}{2} - \frac{q}{2\mu}.$$

Luego, de la ecuación resolvente se deduce $-q = 8\sqrt{u_1} \cdot \sqrt{u_2} \cdot \sqrt{u_3}$, escogiendo debidamente las determinaciones de las raíces cuadradas y, por tanto, las cónicas degeneradas serán los pares de rectas

$$\left.\begin{aligned} y &= +\, 2\sqrt{u_1}x - 2u_1 + 2\sqrt{u_2}\sqrt{u_3} \quad (1) \\ y &= -\, 2\sqrt{u_1}x - 2u_1 - 2\sqrt{u_2}\sqrt{u_3} \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= +\, 2\sqrt{u_2}x - 2u_2 + 2\sqrt{u_3}\sqrt{u_1} \quad (3) \\ y &= -\, 2\sqrt{u_2}x - 2u_2 - 2\sqrt{u_3}\sqrt{u_1} \quad (4) \end{aligned}\right\}$$

....

En definitiva, las soluciones de la ecuación [I] x_1, x_2, x_3, x_4 serán las abscisas de las intersecciones de los siguientes pares de rectas (1)—(3), (1)—(4), (2)—(3), (2)—(4), ...; es decir,

$$\begin{aligned} x_1 &= +\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} \\ x_2 &= +\sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3} \\ x_3 &= -\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3} \\ x_4 &= -\sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} \end{aligned}$$