SOBRE EL CALCULO DE VARIACIONES

por

V. Martín Jadraque

El motivo de este trabajo no es llegar a conclusiones desconocidas, sino a enfocar el cálculo de variaciones desde otro punto de vista atendiendo a las funciones que se utilizan para llegar a las condiciones necesarias de Euler.

Para esto presentamos el problema de la manera siguiente: Se trata de buscar una función $y = y(x)$ continua y que admite derivadas con-

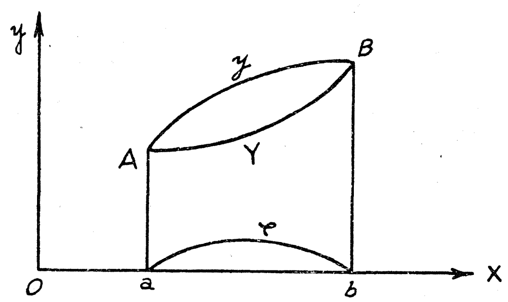

Figura 1

tinuas en el intervalo $[a, b]$ y tal que pasando por los puntos A y B (figura 1.ª) hace máxima o mínima a la integral $I = \int_a^b f(x, y, y')dx$ siendo f una función de tres variables x, y, y' que es continua, así como sus derivadas parciales hasta las de tercer orden.

Supongamos que $y = y(x)$ es la solución buscada y que $y = \varphi(x)$ es una función arbitraria que se anula para $x = a$ y $x = b$, o sea

$$\{ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \}$$

y que admite derivadas en $[a, b]$.

Consideremos las funciones $Y = y \cdot e^{\lambda\varphi}$. Todas estas funciones Y dependen del parámetro λ y de la variable independiente x, y son tales que $Y(a) = y(a)$; $Y(b) = y(b)$ ya que $e^{\lambda\varphi(a)} = e^0 = 1$ y $e^{\lambda\varphi(b)} = e^0 = 1$. Por tanto las funciones Y también pasan por los puntos A y B.

Tenemos:

$$\left.\begin{aligned} Y &= y \cdot e^{\lambda\varphi} \\ Y' &= \frac{dY}{dx} = e^{\lambda\varphi} \cdot [y' + \lambda y\varphi'] \\ Y'' &= \frac{d^2Y}{dx^2} = e^{\lambda\varphi} \cdot [y'' + \lambda(2\varphi'y' + \varphi''y) + \lambda^2 y\varphi'^2] \end{aligned}\right\} \quad [I]$$

$$[II]\left\{\begin{aligned} &\frac{\delta Y}{\delta\lambda} = y \cdot \varphi e^{\lambda\varphi} \\ &\frac{\delta Y'}{\delta\lambda} = e^{\lambda\varphi} \cdot [\varphi y' + y\varphi' + \lambda y\varphi\varphi'] \\ &\frac{\delta Y''}{\delta\lambda} = \left\{\begin{matrix} \varphi \cdot [y'' + \lambda(2\varphi'y' + \varphi''y) + \lambda^2 y\varphi'^2] + [2\varphi'y' + \\ + \varphi''y + 2\lambda y\varphi'^2] \end{matrix}\right\} \cdot e^{\lambda\varphi} \end{aligned}\right.$$

Por suponer que $y = y(x)$ es la solución, se ha de tener que en $I(\lambda) = \int_a^b f(x, Y, Y')dx$ cuando hagamos $\lambda = 0$ se ha de verificar que $I(0)$ es un máximo o mínimo y por consiguiente $\left[\frac{\delta I(\lambda)}{\delta\lambda}\right]_{\lambda = 0} = 0$.

$$\frac{\delta I(\lambda)}{\delta\lambda} = \int_a^b \left(\frac{\delta f}{\delta Y} \cdot \frac{\delta Y}{\delta\lambda} + \frac{\delta f}{\delta Y'} \cdot \frac{\delta Y'}{\delta\lambda}\right) dx$$

y haciendo $\lambda = 0$ se obtiene:

$$0 = \left[\frac{\delta I(\lambda)}{\delta\lambda}\right]_{\lambda = 0} = \int_a^b \left[\frac{\delta f}{\delta y} \cdot y \cdot \varphi + \frac{\delta f}{\delta y'}(\varphi y' + y\varphi')\right] dx$$

$$= \int_a^b \left[y\varphi \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta y'} \cdot \frac{d(y\varphi)}{dx}\right] dx = \int_a^b \varphi y \frac{\delta f}{\delta y}\, dx +$$

$$+ \left|\varphi y \frac{\delta f}{\delta y'}\right|_a^b - \int_a^b \varphi y \frac{d\left(\frac{\delta f}{\delta y'}\right)}{dx}\, dx$$

y como $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ se tiene

$$\left[\frac{\delta I(\lambda)}{\delta \lambda}\right]_{\lambda = 0} = 0 = \int_a^b \varphi \cdot y \left[\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d\left(\dfrac{\delta f}{\delta y'}\right)}{dx}\right] dx$$

Esta última integral ha de valer cero cualquiera que sea φ, por tanto, se ha de verificar:

$$\boxed{\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta y'}\right) = 0}$$

que es la condición necesaria de Euler que ha de cumplir la función y solución.

Análogamente si $\mathrm{I} = \int_a^b f(x, y, y', y'')dx$ se tendrá:

$\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^b f(x, \mathrm{Y}, \mathrm{Y}', \mathrm{Y}'')dx$ y se tendrá que verificar $\left[\dfrac{\delta \mathrm{I}(\lambda)}{\delta y}\right]_{\lambda=0} = 0$

$$\frac{\delta \mathrm{I}(\lambda)}{\delta \lambda} = \int_a^b \left(\frac{\delta f}{\delta \mathrm{Y}} \cdot \frac{\delta \mathrm{Y}}{\delta \lambda} + \frac{\delta f}{\delta \mathrm{Y}'} \cdot \frac{\delta \mathrm{Y}'}{\delta \lambda} + \frac{\delta f}{\delta \mathrm{Y}''} \cdot \frac{\delta \mathrm{Y}''}{\delta \lambda}\right) dx$$

$$0 = \left[\frac{\delta \mathrm{I}(\lambda)}{\delta \lambda}\right]_{\lambda=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\delta f}{\delta y} \cdot y\varphi + \frac{\delta f}{\delta y'}(\varphi y' + \varphi' y) + \frac{\delta f}{\delta y''} \cdot (\varphi y'' + 2\varphi' y' + \varphi'' y)\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[\varphi y \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta y'} \cdot \frac{d(\varphi y)}{dx} + \frac{\delta f}{\delta y''} \cdot \frac{d^2(\varphi y)}{dx^2}\right] dx =$$

$$= \int_a^b \varphi y \frac{\delta f}{\delta y} dx + \left|\varphi y \frac{\delta f}{\delta y'}\right|_a^b - \int_a^b \varphi y \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta y'}\right) +$$

$$+ \left|\frac{d}{dx}(\varphi y) \cdot \frac{\delta f}{\delta y''}\right|_a^b - \int_a^b \frac{d(\varphi y)}{dx} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta y''}\right) dx$$

y como ahora suponemos que $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$ para que las funciones Y pasen por A y B y tengan en estos puntos unas tangentes fijas t_A y t_B se concluye que:

$$0 = \left[\frac{\delta I(\lambda)}{\delta\lambda}\right]_{\lambda=0} = \int_a^b \varphi y \frac{\delta f}{\delta y} \cdot dx - \int_a^b \varphi y \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta y'}\right) -$$

$$- \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta y''}\right) \cdot \frac{d(\varphi y)}{dx} \cdot dx = \int_a^b \varphi y \left[\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta y'}\right)\right] dx -$$

$$- \left|\varphi y \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta y''}\right)\right|_a^b + \int_a^b \varphi y \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\delta f}{\delta y''}\right) dx =$$

$$= \int_a^b \varphi y \left[\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\delta f}{\delta y''}\right)\right] dx = 0$$

Como esta integral se ha de anular cualquiera que sea φ se ha de verificar:

$$\boxed{\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\delta f}{\delta y''}\right) = 0}$$

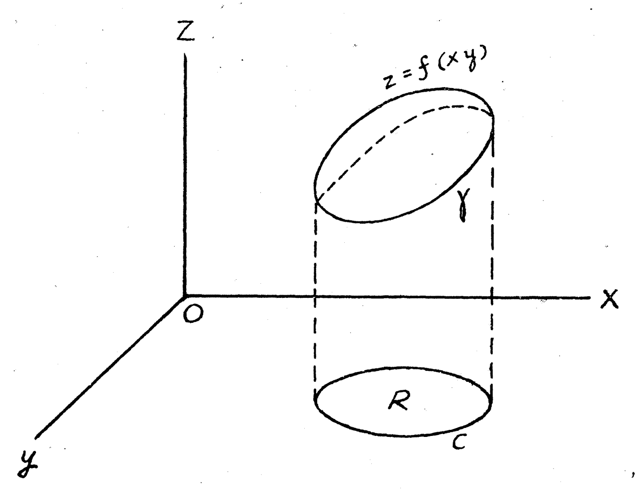

Figura 2

Análogamente vamos a ver el caso en que el problema sea con integrales dobles. Para ello suponemos una función $F(x, y, z, p, q)$ $\left(\text{siendo } p = \frac{\delta z}{\delta x} \quad q = \frac{\delta z}{\delta y}\right)$ de cinco variables independientes x, y, z, p, q, que es continua de las cinco variables mientras el punto de coordenadas (x, y, z) permanece en un cierto recinto G del espacio y p, q se mantienen finitos. Suponemos que F admite derivadas parciales respecto de las cinco variables y que estas son continuas en G.

Supongamos en el recinto G una curva γ cerrada, cuya proyección sobre el plano XOY es una curva cerrada C sin puntos dobles (fig. 2.ª). El problema que queremos resolver es el siguiente: Dada la integral

(1) $\int\int_R F(x, y, z, p, q)dxdy$ queremos hallar una función $z = f(x, y)$ tal que haga máxima o mínima la integral anterior y tal que la función $z = f(xy)$ pase por la curva γ y sea continua lo mismo que sus derivadas parciales de primer orden cuando el punto (xy) se mueve en el recinto R que limita la curva C. Supongamos que $z = z(x, y)$ es la solución buscada, y que $z = \varphi(x, y)$ es una función arbitraria continua lo mismo que sus derivadas parciales y que se anula cuando el punto (x, y) describe la curva C.

Consideremos las funciones $Z = z \cdot e^{\lambda\varphi}$ donde λ es un parámetro variable. Introduciendo esta función Z en la integral (1) tendremos:

$$I(\lambda) = \int\int_R F(x, y, Z, Z_x, Z_y)dxdy.$$

Esta integral ha de tener un máximo o un mínimo para $\lambda = 0$, pues entonces $Z = z$ que suponemos la solución.

$$\left.\begin{aligned} Z &= z \cdot e^{\lambda\varphi} \\ Z_x &= [z_x + \lambda z\varphi_x]e^{\lambda\varphi} \\ Z_y &= [z_y + \lambda z\varphi_y] \cdot e^{\lambda\varphi} \end{aligned}\right\} (2) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\delta Z}{\delta\lambda} &= z\varphi e^{\lambda\varphi} \\ \frac{\delta Z_x}{\delta\lambda} &= \varphi[z_x + \lambda z\varphi_x]e^{\lambda\varphi} + z\varphi_x e^{\lambda\varphi} \\ \frac{\delta Z_y}{\delta\lambda} &= \varphi[z_y + \lambda z\varphi_y]e^{\lambda\varphi} + z\varphi_y e^{\lambda\varphi} \end{aligned}\right\} (3)$$

Hemos dicho anteriormente que $I(\lambda)$ ha de tener un máximo o un mínimo para $\lambda = 0$, por tanto, se tendrá que verificar:

$$\left[\frac{\delta I(\lambda)}{\delta\lambda}\right]_{\lambda=0} = 0$$

Calculemos esta expresión:

$$\frac{\delta I(\lambda)}{\delta\lambda} = \int\int_R \left(\frac{\delta F}{\delta Z} \cdot \frac{\delta Z}{\delta\lambda} + \frac{\delta F}{\delta Z_x} \cdot \frac{\delta Z_x}{\delta\lambda} + \frac{\delta F}{\delta Z_y} \cdot \frac{\delta Z_y}{\delta\lambda}\right)dxdy$$

y haciendo $\lambda = 0$ teniendo en cuenta las expresiones (2) y (3) se tiene:

$$0 = \left[\frac{\delta I(\lambda)}{\delta\lambda}\right]_{\lambda=0} = \iint_R \left(\frac{\delta F}{\delta z}\cdot z\varphi + \frac{\delta F}{\delta z_x}\cdot[\varphi z_x + z\varphi_x] + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta F}{\delta z_y}[\varphi z_y + z\varphi_y]\right) dxdy =$$

$$= \iint_R \left[\frac{\delta F}{\delta z}\cdot z\varphi + \frac{\delta F}{\delta p}\cdot\frac{\delta(\varphi z)}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta q}\frac{\delta(\varphi z)}{\delta y}\right] dxdy.$$

Llamando $\psi = z \cdot \varphi$ [ψ es arbitraria por serlo φ y se anula a lo largo de C por anularse φ] tenemos:

$$\iint_R \left[\psi \cdot \frac{\delta F}{\delta z} + \frac{\delta F}{\delta p}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta q}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta y}\right] dxdy = 0 \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \iint_R \frac{\delta F}{\delta p}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta x}\, dxdy &= \iint_R \left[\frac{\delta}{\delta x}\left(\psi\cdot\frac{\delta F}{\delta p}\right) - \psi\,\frac{\delta\left(\frac{\delta F}{\delta p}\right)}{\delta x}\right] dxdy \\ \iint_R \frac{\delta F}{\delta q}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta y}\cdot dxdy &= \iint_R \left[\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta q}\cdot\psi\right) - \psi\,\frac{\delta\left(\frac{\delta F}{\delta q}\right)}{\delta y}\right] dxdy \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

Teniendo en cuenta el teorema de Riemann que dice que

$$\iint_R \left(\frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y}\right) dxdy = \int_C (Pdy - Qdx)$$

y aplicándolo a (4′) se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \iint_R \frac{\delta}{\delta x}\left(\psi\,\frac{\delta F}{\delta p}\right) dxdy &= \int_C \psi\,\frac{\delta F}{\delta p}\, dy = 0 \\ \iint_R \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta q}\cdot\psi\right) dxdy &= -\int_C \psi\,\frac{\delta F}{\delta q}\, dx = 0 \end{aligned}\right\}$$

puesto que ψ se anula en el contorno C.

Con estas conclusiones la ecuación (4) queda de la forma:

$$\int\int_R \psi \left[\frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta\left(\dfrac{\delta F}{\delta p}\right)}{\delta x} - \frac{\delta\left(\dfrac{\delta F}{\delta q}\right)}{\delta y} \right] dxdy = 0$$

Para que esta integral doble sea nula, cualquiera que sea la **función** arbitraria ψ, es necesario y suficiente que se verifique:

$$\boxed{\frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta\left(\dfrac{\delta F}{\delta p}\right)}{\delta x} - \frac{\delta\left(\dfrac{\delta F}{\delta q}\right)}{\delta y} = 0}$$

SECCION INFORMATIVA

Colaboradores e investigadores del C. S. I. C.

Por Decreto del 6 del pasado junio, se ha dispuesto respecto a estas plazas, lo siguiente:

Artículo primero.—En los Institutos del Consejo Superior de Investigaciones Científicas existirán plazas de colaboradores y de investigadores científicos dedicados a trabajar en las investigaciones científicas desarrolladas en dichos Institutos, plazas que podrán ser establecidas por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas y sus distintos Patronatos, así como por Corporaciones públicas y Fundaciones y Entidades privadas.

Artículo segundo.—Las plazas de colaboradores e investigadores científicos tendrán carácter temporal por cuatro años, pudiendo ser prorrogados si la labor investigadora lo aconseja y así lo acuerda la Entidad de la que dependa la dotación.

Artículo tercero.—Los colaboradores e investigadores científicos habrán de ser Doctores que hayan trabajado durante tres años al menos en Centro de investigación con resultado satisfactorio. Será necesaria la presentación de un certificado de la Dirección del Instituto o Centro correspondiente, fijando el tiempo que ha trabajado e informando acerca de las condiciones de competencia y laboriosidad demostrada durante ese período. El nombramiento de becario y ayudante será atestiguado mediante certificado de la Secretaría del Consejo.

Se contará en este tiempo el que haya invertido en pensiones en el extranjero cuando el pensionado haya sido enviado de acuerdo con el Instituto o Centro respectivo, y a la vista de la labor desarrollada, la Dirección del Instituto o Centro informe favorablemente el cómputo de este tiempo.

El personal de los Institutos del Consejo que sin tener esa titulación haya alcanzado una consideración científica destacada por los trabajos de investigación publicados y por el valor de su labor en el Instituto, podrá ser propuesto por la Dirección de éste al Consejo para ser admitido a la provisión de las plazas de colaboradores si cuenta con un mínimo de ocho años de trabajo en el Instituto respectivo, atestiguado por el nombramiento correspondiente.

Artículo cuarto.—Las plazas de colaboradores e investigadores científicos se proveerán por los Patronatos o uniones de Patronatos tras examen detenido llevado a cabo por una ponencia especial de la propuesta formulada por la Junta del Instituto correspondiente. También podrán proveerse por concurso-oposición o por concurso, según el Reglamento o Reglamentos que establezca el Consejo para sus distintos Patronatos. Cuando se trate de plazas dotadas por otras Entidades, éstas propondrán al Consejo el régimen de provisión. Los Patronatos o Juntas o uniones de Patronatos establecerán las normas a que ha de ajustarse la ponencia y, en su caso, el Reglamento del concurso-oposición.

Artículo quinto.—Transcurridos los cuatro años de nombramiento de colaborador, si la índole del trabajo realizado exige su continuación, podrá renovarse el nombramiento por un período igual o inferior después de un examen satisfactorio de la labor realizada.

Estas renovaciones podrán llevarse a cabo indefinidamente.

Artículo sexto.—El nombramiento de investigador exigirá ser colaborador científico y haber obtenido al menos una renovación cuatrienal.

Artículo séptimo.—Las plazas de investigador serán también temporales por períodos de cuatro años, que podrán ser renovados tras el examen satisfactorio de la labor realizada si el Instituto o Centro respectivo considera necesaria la continuación del trabajo

Artículo octavo.—Las ponencias precisas para la designación de colaboradores e investigadores o los Tribunales que hayan de juzgar los concursos serán convocados por cada materia o para determinados Institutos o Centros y estarán compuestos por cinco Jueces.

En todo momento el Director del Instituto podrá informar a la Junta del Patronato o unión de Patronatos o a la autoridad correspondiente de la labor de cada colaborador o investigador, y si el juicio fuese desfavorable se podrán modificar las condiciones del nombramiento y aun proceder a su anulación. Esta anulación exigirá el juicio y propuesta de una ponencia o Tribunal análogos a los que determinaron el nombramiento y la aprobación de dicha propuesta por el Organismo que efectuó la designación.

Artículo noveno.—En los Institutos del Consejo en los que existan servicios permanentes esenciales para la labor del conjunto del Instituto, podrá el Patronato respectivo conservar por tiempo indefinido a los colaboradores o investigadores que tengan dos cuatrienios de trabajo científico, favorablemente juzgado con arreglo al régimen general que se aplica al personal científico del Consejo.

En todo caso podrá seguirse régimen de contrato.

Artículo décimo.—Los colaboradores e investigadores deberán presentar anualmente una relación de la labor realizada a los Organismos de que dependan, los cuales trazarán las normas con arreglo a las cuales ha de desarrollarse el trabajo de este personal científico.

Artículo undécimo.—Los Institutos cuyo presupuesto se cubra en parte considerable con ingresos distintos a la subvención del Estado podrán asignar una parte de estos ingresos del Estado a la provisión de plazas de colaboradores e investigadores establecidas por el Consejo a propuesta del Instituto que las dote, con informe del Patronato respectivo y provista de la misma forma consignada en el presente Decreto. Los colaboradores e investigadores así designados tendrán la misma consideración que los demás del Consejo, y en caso de variación o desaparición del Instituto a que pertenecen pasarán a un Instituto similar, al que se transferirá el crédito que tenían asignado en el Instituto que haya sido variado o suprimido.

Artículo duodécimo.—Los colaboradores o investigadores que ocupen plazas creadas por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas tendrán, con cargo al presupuesto de dicho Consejo, el sueldo establecido por el Consejo ejecutivo, y además las gratificaciones que señalan los respectivos Patronatos, Juntas o uniones de los mismos. El Consejo determinará asimismo las gratificaciones de antigüedad, así como las que correspondan a servicios de carácter social.

Los colaboradores o investigadores que ocupen plazas creadas por Corporación pública o Fundaciones o Empresas privadas percibirán las dotaciones fijadas por éstas.

Artículo décimotercero.—En el Consejo Superior de Investigaciones Científicas el régimen de colaboradores e investigadores será distinto en los Institutos, Departamentos o Secciones propios y en los coordinados.

A los investigadores y colaboradores de Institutos, Departamentos o Secciones propios se les exige dedicación plena durante el horario completo de trabajo.

La Junta del Patronato o de la Unión de Patronatos, previa petición e informe del Instituto, podrá estimar, en los casos que se propongan, qué trabajos ajenos a los realizados en el Consejo pueden considerarse afines o complementarios a investigaciones que en él se realicen, y, en su caso, autorizarlos con la consiguiente modificación de jornadas y de retribución.

Los investigadores y colaboradores podrán limitar su trabajo a media jornada, si les autoriza la Junta del Patronato o unión de Patronatos, previo informe favorable de su Instituto. En este caso su sueldo quedará reducido al cincuenta por ciento y la gratificación en la cuantía que el Patronato determine.

Artículo décimocuarto.—El régimen de nombramiento, dedicación y retribución establecido para los colaboradores e investigadores científicos no es aplicable a quienes pertenezcan a un Cuerpo de la Administración del Estado. Estos podrán, sin embargo, realizar su trabajo de investigación en los Institutos conforme al régimen general que se aplica al personal científico del Consejo.

Artículo décimoquinto.—El caso de mérito excepcional valorado por el volumen y trascendencia de las investigaciones publicadas y por la dedicación perseverante durante gran parte de la vida podrá ser reconocido por el Consejo ejecutivo mediante un nombramiento de investigador, estableciendo en cada ocasión los emolumentos y condiciones de la designación.

Artículo décimosexto.—Existirán también colaboradores adjuntos y colaboradores eventuales, éstos de nombramiento anual, renovable, con el sueldo de dos tercios de la dotación del colaborador. Asimismo, en los Institutos en que la índole de trabajo lo exija, podrá haber también técnicos con el título de Enseñanza Superior o con ocho años de trabajo, como señala el párrafo final del artículo tercero, para aquellos servicios científicos que por su carácter instrumental o de repetición sin constituir por sí mismo investigación son necesarios para los trabajos de conjunto de los Institutos. El régimen del personal a que se refiere este artículo será establecido por el Patronato o Junta de Patronatos respectivo.

Jubilación.

Ha sido jubilado recientemente, el catedrático de la Universidad Central, D. Julio Rey Pastor, eminente figura de la Matemática Española.

Con tal motivo, la R. S. M. E. renueva su adhesión a su ilustre Presidente.

Pr. Alvarez Ude.

No alcanzó nuestro último número a recoger la triste noticia del fallecimiento del catedrático de la Universidad Central, ya jubilado, D. José Alvarez Ude, admirado profesor de tantas generaciones de estudiantes, que colmaron su sed de Descriptiva con sus amenas y sabias lecciones.

Descanse en paz el ilustre Académico y gran matemático, y sean estas cortas líneas el sencillo, pero sentido, homenaje a su memoria, de *Gaceta Matemática*.

Aniversario.

Cúmplese el centenario del nacimiento del geómetra español, D. Cecilio Jiménez Rueda.

Todavían corren entre las manos de los estudiosos algunas de sus notables publicaciones, *Geometría Métrica, Formas geométricas...*, imperecederas por su contenido. Constituye un orgullo para la Matemática española jalonar estas señaladas fechas de nuestra historia científica.

XXIV Congreso Luso-Español para el Progreso de las Ciencias.

El XXIV Congreso Luso-Español para el Progreso de las Ciencias se celebrará en Madrid en la segunda mitad del mes de noviembre del presente año, coincidiendo con la conmemoración de las *Bodas de Oro de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias.*

Como es norma en nuestros Congresos, celebrados con la colaboración de la Asociación Portuguesa para el Progreso de las Ciencias, podrán concurrir los miembros de ambas Asociaciones y las personas que, sin serlo, se inscriban abonando la cuota de congresista.

Aparte de las sesiones generales del Congreso (apertura, clausura, etc.) y de los actos sociales y excursiones que se organicen, se celebrarán por separado las sesiones correspondientes a cada una de las Secciones en que está dividida la Asociación. Los discursos inaugurales de las siguientes Secciones correrán a cargo de las personalidades que se citan:

Matemáticas: Prof. Dr. José M.ª Orts, Catedrático de la Universidad de Barcelona.

Astronomía, Geodesia y Geofísica: Contralmirante D. Francisco Fernández de la Puente, Director del Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando.

Publicaciones.

Recientemente se han publicado, por el Instituto «Jorge Juan», de Matemáticas, los volúmenes siguientes:

E. Vidal Abascal: *Monografías de Matemáticas*.—II.—Estado actual, Métodos y Problemas de la Geometría Diferencial.—Apéndice: Traducción de la Memoria póstuma de P. Riemann.

L. Pérez Cacho: *Memorias de Matemática del Instituto «Jorge Juan»*. Número 20.—Sobre algunas cuestiones de la teoría de números