SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONVEXAS

por

P. PUIG ADAM

El creciente interés que tienen en Análisis las funciones convexas justifica que intentemos en este artículo, de finalidad expositiva, ofrecer a los lectores de GACETA MATEMÁTICA un cuadro de propiedades que juzgamos más salientes de las mismas, elementalizando de paso algunas demostraciones, sistematizándolas en torno a la esencial propiedad de la ordenación de incrementos, y exponiendo al final alguna aplicación que estimamos interesante.

Suponemos una función $y(x)$ definida unívocamente en un intervalo, cerrado o abierto, finito o infinito, y adoptamos la definición de Jensen: $y(x)$ se llama *convexa* cuando dados dos puntos cualesquiera de dicho intervalo α, β se verifica

$$y\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leqslant \frac{y(\alpha)+y(\beta)}{2}$$

1. *Ordenación de incrementos.*

La definición que acabamos de recordar equivale a la siguiente: *Dos incrementos funcionales consecutivos Δy_0, Δy_1 correspondientes a dos incrementos consecutivos iguales cualesquiera de la variable Δx_0, Δx_1 en el intervalo de definición, verifican la ordenación $\Delta y_0 \leqslant \Delta y_1$.*

Ya que $2y_1 \leqslant y_0 + y_2$ equivale a $y_1 - y_0 \leqslant y_2 - y_1$.

Corolario I.—Puesto que los incrementos funcionales

$$\Delta y_0, \ \Delta y_1, \ \Delta y_2, \ \ldots \ \Delta y_{n-1}$$

correspondientes a n intervalos consecutivos iguales de la variable

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \cdots = \Delta x_{n-1}$$

están ordenados en sentido no decreciente, si $\left\{\begin{array}{l}\text{el primero es positivo}\\ \text{el último es negativo}\end{array}\right\}$ todos los demás lo son también y sus valores absolutos presentarán una ordenación $\left\{\begin{array}{l}\text{no decreciente}\\ \text{no creciente}\end{array}\right\}$. El menor de todos estos valores absolutos es decir, $\left\{\begin{matrix}\text{el primero}\\ \text{el último}\end{matrix}\right\}$ será $\leqslant$ que el promedio aritmético de todos ellos y podremos escribir, respectivamente:

$$| \Delta y_0 | \leqslant \frac{y_n - y_0}{n} \qquad | \Delta y_{n-1} | \leqslant \frac{y_0 - y_n}{n}$$

Corolario II.—*Toda función convexa definida en todo el eje real, y acotada superiormente en él, se reduce a una constante.* De otro modo, todo Δy es nulo. Pues si a un cierto intervalo $\Delta x_0 = x_1 - x_0$ correspondiera un $\Delta y_0 \neq 0$, por repetición de dicho intervalo a la derecha o a la izquierda (según fuera $\Delta y_0 \gtrless 0$) podríamos encontrar puntos de la curva de mayor ordenada y cuya diferencia con y_0 fuera $> n \Delta y_0$ (n entero cualquiera) en contradicción con la acotación. Las funciones convexas verifican, pues, en el campo real propiedad en cierto aspecto análoga a la de las funciones analíticas en el campo complejo.

2. *Continuidad de las funciones convexas acotadas superiormente en un intervalo finito abierto.*

Sea ahora (a, b) un intervalo abierto en el que suponemos definida la función convexa $y(x)$. Sea P' (x, y) un punto de su gráfica (por tanto) $a < x < b$). Consideremos un intervalo Δx suficientemente pequeño para que pueda repetirse varias veces consecutivas a la derecha e izquierda de x en (a, b), de modo que (m, n enteros)

$$n\, \Delta x \leqslant b - x < (n + 1)\, \Delta x \qquad m\, \Delta x \leqslant x - a < (m + 1)\, \Delta x$$

Sea $\Delta^d y$ el incremento funcional correspondiente a Δx a la derecha de P, y sea $\Delta^i y$ el correspondiente a la izquierda.

a) Si ambos incrementos son positivos, también lo serán los sucesivos a la derecha y se tendrá, por lo dicho antes:

$$| \Delta^i y | \leqslant \Delta^d y | \leqslant \frac{y(x + n\Delta x) - y(x)}{n} \tag{1}$$

b) Si ambos son negativos, lo serán también los sucesivos a la izquierda y podremos escribir análogamente

$$| \Delta^d y | \leqslant | \Delta^i y | \leqslant \frac{y(x - m\Delta x) - y(x)}{m} \tag{2}$$

c) Si $\Delta^d y$ es positivo y $\Delta^i y$ negativo (lo contrario es imposible), será

$$| \Delta^d y | \leqslant \frac{y(x + n\Delta x) - y(x)}{n} \qquad | \Delta^i y | \leqslant \frac{y(x - m\Delta x) - y(x)}{m} \tag{3}$$

En todos los casos, pues, incluso si alguno o ambos incrementos son nulos, se verifica alguno de los grupos de desigualdades (1), (2) ó (3). Si $y(x)$ es acotada superiormente, los numeradores de los segundos miembros permanecen finitos mientras los denominadores m, n tienden a infinito al tender $\Delta x \to 0$. Los incrementos a la derecha y a la izquierda de P tienden, pues, a cero con Δx, lo que prueba la continuidad de $y(x)$.

Toda función convexa acotada superiormente en un intervalo finito abierto es continua en él.

3. *Posición relativa de la gráfica y de la cuerda entre dos puntos cualesquiera.*

La definición de Jensen establece que el punto de abscisa media entre dos α, β de la gráfica está en la cuerda que los une o debajo de ella. Veamos que lo mismo ocurre para los demás puntos intermedios. Reiterando el proceso por adopción de puntos medios sucesivos, resulta la propiedad cierta para todos los puntos de la red binaria obtenida por mediaciones sucesivas del intervalo. Como esta red es densa, lo mismo ocurrirá para cualquier otro punto del intervalo, considerado como límite de una sucesión de puntos de la red binaria, ya que este punto puede sumergirse en un intervalo abierto de la red binaria interior al de definición de $y(x)$, en el que dicha función es continua según § 2. En resumen :

Toda cuerda de la gráfica de una función convexa entre dos puntos del intervalo de definición limita superiormente el arco de gráfica subtendido.

Corolario : La gráfica de toda función convexa acotada superiormente en un intervalo abierto se sitúa, entre dos puntos cualesquiera de ella, A, B, en el semiplano inferior determinado por la recta AB, y en el exterior de dicho intervalo la gráfica se sitúa en el semiplano superior (en ambos casos se incluyen los bordes del semiplano).

En efecto, si C es un tercer punto exterior al intervalo AB, no puede situarse por debajo de la recta AB, ya que en tal caso B estaría por encima de AC, o A por encima de CB, en contra de lo anterior.

4. *Ordenación de incrementos relativos.*

Como consecuencia de la propiedad anterior resulta : Al subdividir un intervalo Δx en dos cualesquiera

$$\Delta x_0, \ \Delta x_1$$

no precisamente iguales, el incremento relativo de la derecha aumenta o permanece igual, y el de la izquierda disminuye o permanece igual. Es decir

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} \leqslant \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

5. *Existencia de derivadas a la derecha e izquierda de un punto.*

De la propiedad que acabamos de establecer resulta que al decrecer en valor absoluto el incremento Δx a la derecha de un punto P (interior al intervalo de definición), el incremento relativo

$$\frac{\Delta^d y}{\Delta x}$$

no crece, mientras a la izquierda no decrece. Y como ambos incrementos relativos se acotan mutuamente

$$\frac{\Delta^i y}{\Delta x} \leqslant \frac{\Delta^d y}{\Delta x}$$

cada uno de ellos tiende a un límite que define respectivamente la derivada a la derecha y a la izquierda, en el punto P. *En todo punto P interior al intervalo de definición de una función convexa existe una derivada a la derecha y otra a la izquierda, siendo la derivada a la izquierda* $\leqslant$ *que la derivada a la derecha.*

Llamando tangentes en P a las rectas que pasan por P y tienen por pendiente estas derivadas, resulta: *La gráfica de la función convexa está por encima de toda tangente cuando no coincide con ella.* En efecto, el incremento relativo entre P y cualquier otro punto Q a la derecha de P, es mayor o igual que la derivada a la derecha de dicho punto, lo que implica una posición de Q en dicha tangente o por encima de ella, y análogamente para los puntos a la izquierda.

6. *Mínimos.*

Toda función convexa definida en un intervalo finito (abierto o cerrado) (α, β) *está acotada inferiormente en él.*

En efecto, si la curva no estuviera acotada inferiormente, para cada entero negativo $-n$ existiría un punto A_n (x_n, y_n) de abscisa x_n en el intervalo, es decir, $\alpha < x_n < \beta$, y de ordenada $y_n < -n$. Tomando uno de los límites de oscilación ξ de la sucesión x_n y un punto cualquiera P (x_0, y_0) de la gráfica, tal que $x_0 \neq \xi$, en el intervalo comprendido entre x_0 y ξ no podría existir curva, pues si $x_0 < \xi$, cualquier punto (a, b) de ella habría de cumplir (§ 4).

$$\frac{b - y_0}{a - x_0} \leqslant \frac{y_{n'} - y_0}{x_{n'} - x_0} < \frac{-n' - y_0}{x_{n'} - x_0}$$

para todos los valores enteros n' que hicieran

$$| x_{n'} - \xi | < \varepsilon < | \xi - a |$$

lo cual es imposible por tender la última fracción a $-\infty$ al crecer n'. Análogamente, si $x_0 > \xi$ se habría de verificar (§ 4)

$$\frac{y_0 - b}{x_0 - a} \geqslant \frac{y_0 - y_{n'}}{x_0 - x_{n'}} > \frac{y_0 - n'}{x_0 - x_{n'}}$$

igualmente imposible al crecer n'. (*)

Toda función convexa en un intervalo cerrado tiene un mínimo absoluto en un punto o en todo un intervalo. La existencia de dicho mínimo resulta del teorema anterior y del de Bolzano-Weierstrass. Si existe más de un punto con este valor mínimo, la función ha de tomar el mismo valor en todo el intervalo comprendido entre ambos por la condición de convexidad y de mínimo absoluto.

7. *Monotonía. Integrabilidad.*

Si la función convexa en un intervalo finito toma el valor mínimo en el extremo $\left\{\begin{matrix}\text{inferior}\\ \text{superior}\end{matrix}\right\}$ *del mismo, la función es monótona* $\left\{\begin{matrix}\text{no decreciente}\\ \text{no creciente}\end{matrix}\right\}$ *en él.* En efecto, la condición de mínimo en el extremo inferior del intervalo excluye la posibilidad de ningún incremento funcional negativo en todo dicho intervalo (propiedad de ordenación de incrementos, que en este caso serán todos $\geqslant 0$), y análogamente en el caso de mínimo en el extremo superior en el que todos los incrementos funcionales deberán ser $\leqslant 0$.

Si la función adquiere el valor mínimo en un punto intermedio del intervalo, la función es monótona no decreciente a la derecha y no creciente a la izquierda.

De la monotonía total o fragmentaria resulta, sin más, la integrabilidad Riemann de una función convexa acotada superiormente en un intervalo finito (ya que también es acotada inferiormente según hemos visto antes).

8. *Límites de una función convexa acotada en los extremos de un intervalo finito.*

Cuando la función convexa definida en un intervalo finito y, por tanto, acotada inferiormente en él (§ 6) se halla además acotada superiormente, esta doble acotación y la monotonía de la función en las proximidades de

---

(*) El incumplimiento de estas desigualdades traduce el hecho intuitivo de ser materialmente barrida por las cuerdas PA_n la zona vertical de plano comprendida entre x_0 y ξ.

los extremos del intervalo asegura la existencia del límite superior de la función en ellos. Este límite puede coincidir o no con el valor de la función en dichos extremos, lo que prueba que la continuidad puede dejar de cumplirse en los extremos del intervalo cuando éste es cerrado.

Ejemplo: La función nula en un intervalo abierto finito cualquiera (a, b) e igual a un valor positivo en cada extremo, es convexa y discontinua en el mismo intervalo cerrado.

9. *Monotonía de la derivada.*

Ya hemos dicho que: La derivada a la izquierda de cada punto es $\leqslant$ que la derivada a la derecha en el mismo. Pero además:

Si $x_1 < x_2$ cualquiera de las derivadas (derecha o izquierda) en x_1 es $\leqslant$ que cualquiera de las derivadas (derecha o izquierda) en x_2, y la pendiente de la cuerda entre ambos puntos está comprendida entre los valores de dos derivadas cualesquiera de distinto extremo.

En efecto, tomando incrementos Δx menores en valor absoluto que $x_2 - x_1$, cualquiera de las dos derivadas en x_1 es límite de un incremento relativo (derecha o izquierda) menor que el incremento relativo entre x_1 y x_2, y éste menor que el incremento relativo (derecha o izquierda) en x_2 en virtud de § 4.

La derivada (derecha o izquierda indistintamente) de una función convexa es, pues, una función monótona.

10. *La integral y la fórmula de los trapecios.*

Dado un intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ interior al de definición de una función convexa $y(x)$ supongamos efectuada una partición del mismo en intervalos parciales. Los trapecios que se obtienen al sustituir en cada intervalo parcial la gráfica por su cuerda sumarán un área (con el signo que resulte de sus ordenadas) seguramente superior al valor de la integral definida

$$\int_{\alpha}^{\beta} y\,dx$$

La monotonía de las derivadas permite obtener una acotación sencilla (aunque grosera) del error.

En virtud de lo dicho en §§ 5 y 8, la gráfica está situada entre la cuerda y cualquier tangente extrema. Y como la pendiente de la cuerda es intermedia entre la de dos tangentes de distinto extremo, trazando por el extremo izquierdo del arco una tangente AM y una paralela AN a una de las tangentes en el extremo derecho B, la cuerda, así como la gráfica, estarán entre ambas rectas AM y AN, y el área entre la cuerda y la gráfica que mide el error, será menor que el área del triángulo AMN (figura), com prendido entre ambas rectas. Pero como las pendientes varían monótonamente, trasladando todos estos triángulos así construídos en cada intervalo, a un vértice común 0, todas las paralelas por 0 a las tangentes sucesivas quedarán ordenadas y la suma de las áreas de dichos triángulos será

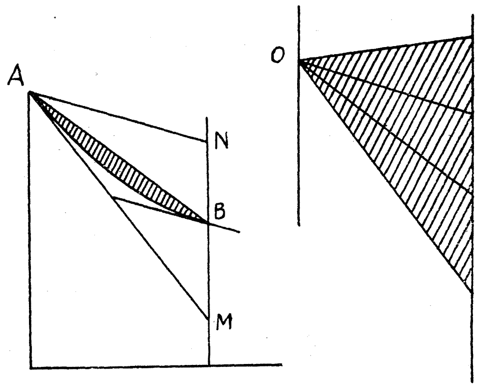

Figura 1

en definitiva $\leqslant$ la del triángulo que las paralelas por 0 a las tangentes extremas interceptan en un intervalo de anchura igual al mayor de los intervalos (norma de la partición). Para toda sucesión de particiones cuya norma tienda a cero, el error tenderá a cero y la suma de los trapecios tenderá a la integral.

Pero la misma acotación del error puede aplicarse a una sucesión cualquiera de intervalos finitos uniformemente acotados para una $y(x)$ convexa definida en todo el eje real o en una semirrecta del mismo ($x > a$, por ejemplo), de lo que resulta:

Si $y(x)$ es convexa en un intervalo infinito y es su derivada acotada en él, la suma S_n de las áreas de n trapecios limitados por las cuerdas en intervalos de longitud $\leqslant \Delta$ y la integral I_n de $y(x)$ en el intervalo suma difieren entre sí menos que

$$\frac{1}{2} \Delta^2 (L - l)$$

donde L y l son las cotas superior e inferior de la derivada en el intervalo de definición de $y(x)$. Si la integral I en dicho intervalo es impropia, la suma de los trapecios constituye una representación asintótica de la misma, ya que $I_n - S_n$ se conserva finita, y por tanto S_n / I_n tiende a la unidad. S_n puede, pues, sustituir a I_n en todo cálculo de límites en que la referida integral intervenga como factor o divisor.

Advertencia. Todo lo dicho para funciones convexas puede repetirse para funciones *cóncavas,* definidas análogamente cambiando el signo de las desigualdades y los términos «mínimo» por «máximo», «cota inferior» por «cota superior» y recíprocamente.

APLICACIONES

1. *Fórmula de Stirling.*

En el intervalo 1, ∞ la función $\log_e x$ es cóncava y tiene derivada acotada. Por tanto, la diferencia entre la integral entre 1 y n

$$\int_1^n \log x dx = n \log n - n + 1 = \log (e^{1-n} \cdot n^n)$$

y la suma de las áreas de los trapecios inscritos definidos por las ordenadas en los puntos de abscisas 2,3, 4, ... n

$$\log 2 + \lg 3 + \ldots + \log (n-1) + \frac{1}{2} \log n = \log \frac{n!}{\sqrt{n}}$$

es una cantidad creciente que permanece finita al crecer n. Tiene, pues, límite esta diferencia y, por consiguiente, también tiene límite el cociente. $n!/e^{-n} . n^n . \sqrt{n}$ (producto por e del antilogaritmo de dicha diferencia). El cálculo de dicho límite se obtiene mediante la fórmula de Wallis, y resulta $\sqrt{2\pi}$, obteniéndose la fórmula de Stirling.

2. *Constante de Euler.*

Si cortamos una rama de hiperbola por un sistema de rectas paralelas (cada un secante en un solo punto a dicha rama), de tal modo que las an-

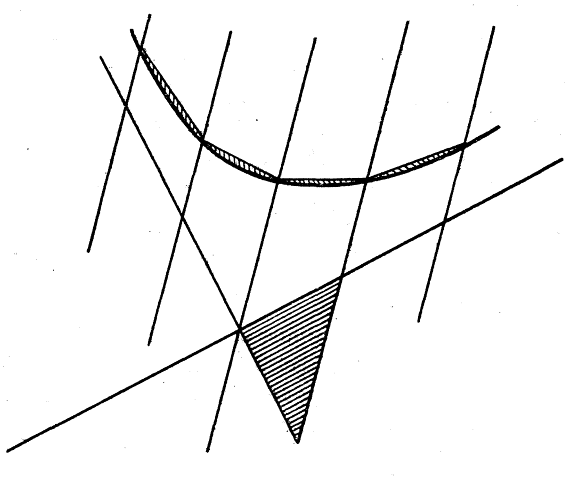

Figura 2

churas de las fajas de plano que determinan cada dos consecutivas sean acotadas en su conjunto, la suma de las áreas de los segmentos hiperbólicos comprendidos entre las cuerdas limitadas por los puntos de intersección consecutivos y la hiperbola, permanece finita, y menor que el área del triángulo limitado por las asintotas y una paralela al sistema de rectas situada a distancia del centro igual a la anchura máxima de las fajas. Basta, en efecto, aplicar la limitación anterior.

Si una de las rectas del sistema coincide con una asintota, y las fajas son de ancho constante igual a, podemos calcular la suma de los segmentos hiperbólicos definidos como antes, excluído el punto impropio de la asíntota del sistema.

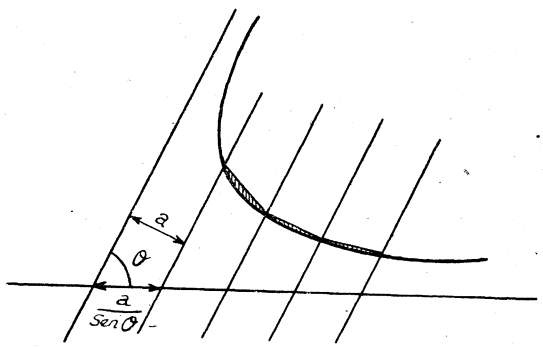

Figura 3

Si es θ el ángulo de las asíntotas y $xy = k$ la ecuación de la hipérbola referida a las asintotas, la suma de $n - 1$ de estos segmentos hiperbólicos es, en efecto, (γ constante de Euler),

$$\operatorname{sen}\theta\left\{ a\left(\frac{1}{2}\frac{k}{a} + \frac{k}{2a} + \frac{k}{3a} + \dots + \frac{k}{(n-1)a} + \frac{1}{2}\frac{k}{na}\right) - \int_{a/\operatorname{sen}\theta}^{na/\operatorname{sen}\theta} \frac{k}{x}\,dx \right\} = \operatorname{sen}\theta\left\{ k\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{k}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - k \log n \right\} \rightarrow k \operatorname{sen}\theta\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)$$

Para la hiperbola equilátera $xy = 1$, resulta esta suma igual a la constante de Euler, menos $1/2$; es decir, 0,07721.