NOTA SOBRE LA ECUACION DE LA TANGENTE EN UN PUNTO ORDINARIO DE UNA CURVA $F(x, y) = 0$

por

Horacio Gutiérrez Rivero

La determinación de la ecuación de la tangente a una curva plana $F(x, y) = 0$, no ofrece ninguna dificultad siguiendo el procedimiento ordinario, y en general es un problema sencillo. No obstante, el método que se expone en esta nota, creemos que puede resultar ventajoso por su brevedad en algunos casos; por ejemplo, cuando la ecuación de la curva tiene pocos términos.

Para fijar las ideas, comenzaremos por tratar las curvas de segundo y tercer orden, generalizando después para una curva de orden n.

Emplearemos coordenadas homogéneas por lograrse así la simetría de las fórmulas. Por esta razón, en la aplicación práctica, debe de introducirse la z. Como z y Z_1 (coordenada del punto), van a ser iguales a 1, no complican los cálculos, facilitando el desarrollo.

I. Sea la curva representada por la ecuación general de segundo grado homogénea

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \qquad (1)$$

La ecuación de la tangente en un punto (X_1, Y_1, Z_1) de la curva será:

$$(x - X_1)(2a_{11}X_1 + 2a_{12}Y_1 + 2a_{13}Z_1) + (y - Y_1)(2a_{22}Y_1 + 2a_{12}X_1 + 2a_{23}Z_1) + (z - Z_1)(2a_{33}Z_1 + 2a_{13}X_1 + 2a_{23}Y_1) = 0$$

Haciendo operaciones resulta:

$$2a_{11}X_1x + 2a_{22}Y_1y + 2a_{33}Z_1z + 2a_{12}(Y_1x + X_1y) + 2a_{13}(Z_1x + X_1z) + 2a_{23}(Z_1y + Y_1z) - 2(a_{11}X_1^2 + a_{22}Y_1^2 + a_{33}Z_1^2 + 2a_{12}X_1Y_1 + 2a_{13}X_1Z_1 + 2a_{23}Y_1Z_1) = 0$$

Teniendo en cuenta que este último paréntesis es nulo, queda:

$$2a_{11}X_1x + 2a_{22}Y_1y + 2a_{33}Z_1z + 2a_{12}(Y_1x + X_1y) + 2a_{13}(Z_1x + X_1z) + 2a_{23}(Z_1y + Y_1z) = 0$$

Esta ecuación podemos ponerla en la forma:

$$a_{11}(X_1x + xX_1) + a_{22}(Y_1y + yY_1) + a_{33}(Z_1z + zZ_1) + 2a_{12}(X_1y + xY_1) + \\ + 2a_{13}(X_1z + xZ_1) + 2a_{23}(Y_1z + yZ_1) = 0 \qquad (2)$$

que es la ecuación de la tangente a la curva en el punto (X_1, Y_1, Z_1).

Ahora bien; la ecuación (1) se puede poner de esta manera:

$$a_{11}xx + a_{22}yy + a_{33}zz + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \qquad (3)$$

Comparando (2) y (3), se ve que aquélla se obtiene de ésta sustituyendo ordenada y sucesivamente una de las dos variables por la correspondiente coordenada del punto de contacto.

Ejemplo.—Ecuación de la tangente a la hipérbola

$$x^2 - 2xy + 5y - 7 = 0$$

en el punto (1,2).

Pondremos

$$(X_1x + xX_0) - 2(X_1y + xY_1) + 5(Y_1z + yZ_1) - 7(Z_1z + zZ_1) = 0$$

Haciendo $X_1 = 1$, $Y_1 = 2$, $Z_1 = z = 1$, resulta

$$-2x + 3y - 4 = 0$$

que es la ecuación pedida.

Desde luego, en las curvas de 2.º orden, la aplicación de este método podría hacerse más sencilla, pero no insistiremos en ello por conservar el carácter general.

II. Sea la curva representada por la ecuación general de tercer grado

$$a_{111}x^3 + a_{222}y^3 + a_{333}z^3 + 6a_{123}xyz + 3a_{112}x^2y + 3a_{122}xy^2 + 3a_{112}x^2z + \\ 3a_{223}y^2z + 3a_{133}xz^2 + 3a_{233}yz^2 = 0 \qquad (4)$$

La ecuación de la tangente en el punto (X_1, Y_1, Z_1) es:

$$(x - X_1)(3a_{111}X^2 + 6a_{123}Y_1Z_1 + 6a_{112}X_1Y_1 + 3a_{122}Y_1^2 + 6a_{113}X_1Z_1 + \\ + 3a_{133}Z_1^2) + (y - Y_1)(3a_{222}Y_1^2 + 6a_{123}X_1Z_1 + 3a_{112}X_1^2 + 6a_{122}X_1Y_1 + \\ + 6a_{223}Y_1Z_1 + 3a_{233}Z_1^2) + (z - Z_1)(3a_{333}Z_1^2 + 6a_{123}X_1Y_1 + 3a_{113}X_1^2 + \\ + 3a_{223}Y_1^2 + 6a_{133}X_1Z_1 + 6a_{233}Y_1Z_1) = 0$$

Operando lo mismo que en el caso anterior, llegamos a obtener la ecuación de la tangente en la forma:

$$a_{111}(X_1X_1x + X_1xX_1 + xX_1X_1) + a_{222}(Y_1Y_1y + Y_1yY_1 + yY_1Y_1) + \\ + a_{333}(Z_1Z_1z + Z_1zZ_1 + zZ_1Z_1) + 6a_{123}(X_1Y_1z + X_1yZ_1 + xY_1Z_1) + \\ + 3a_{112}(X_1X_1y + X_1xY_1 + xX_1Y_1) + 3a_{122}(X_1Y_1y + X_1yY_1 + xY_1Y_1) + \\ + 3a_{113}(X_1X_1z + X_1xZ_1 + xX_1Z_1) + 3a_{223}(Y_1Y_1z + Y_1yZ_1 + yY_1Z_1) + \\ + 3a_{133}(X_1Z_1z + X_1zZ_1 + xZ_1Z_1) + 3a_{233}(Y_1Z_1z + Y_1zZ_1 + yZ_1Z_1) = 0 \qquad (5)$$

La ecuación (4) puede escribirse así:

$$a_{111}xxx + a_{222}yyy + a_{333}zzz + 6a_{123}xyz + 3a_{112}xxy + 3a_{122}xyy + 3a_{113}xxz + \\ + 3a_{223}yyz + 3a_{133}xzz + 3a_{233}yzz = 0 \qquad (6)$$

Se observa fácilmente que se pasa de (6) a (5) de la misma manera que se pasó de (3) a (2). Es decir, en este caso, sustituyendo ordenada y sucesivamente dos de las variables por las coordenadas del punto.

Ejemplo.—Tangente a la curva

$$4x^3 - 2y^3 + xy^2 - x^2 + 8 = 0$$

en el punto (2,3).

La ecuación podemos considerarla así:

$$4xxx - 2yyy + xyy - xxz + 8zzz = 0$$

y entonces, sustituyendo por rotación en cada término x, y, z por 2, 3, 1, respectivamente, nos da:

$$4(4x + 4x + 4x) - 2(9y + 9y + 9y) + (6y + 6y + 9x) - \\ - (4 + 2x + 2x) + (8 + 8 + 8) = 0$$

o sea

$$53x - 42y + 20 = 0$$

III. Veamos ahora el caso general de una curva de orden n, representada por la ecuación homogénea

$$\Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} a_{1\alpha_2\beta_3\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma = 0 \quad (\alpha + \beta + \gamma = n) \tag{7}$$

Ecuación de la tangente en el punto (X_1, Y_1, Z_1):

$$\begin{aligned}(x - X_1)\, \Sigma \frac{n!\alpha}{\alpha!\beta!\gamma!} a_{1\alpha_2\beta_3\gamma} X_1^{\alpha-1} Y_1^\beta Z_1^\gamma + \\ + (y - Y_1)\, \Sigma \frac{n!\beta}{\alpha!\beta!\gamma!} a_{1\alpha_2\beta_3\gamma} X_1^\alpha Y_1^{\beta-1} Z_1\gamma + \\ + (z - Z_1)\, \Sigma \frac{n!\gamma}{\alpha!\beta!\gamma!} a_{1\alpha_2\beta_3\gamma} X_1^\alpha Y_1^\beta Z_1^{\gamma-1} = 0\end{aligned} \tag{8}$$

O sea

$$\Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} a_{1\alpha_2\beta_3\gamma} (\alpha \cdot X_1^{\alpha-1} x\ Y_1^\beta\ Z_1^\gamma + \beta \cdot X_1^\alpha\ Y_1^{\beta-1} y\ Z_1^\gamma +$$

$$+ \gamma \cdot X_1^\alpha\ Y_1^\beta\ Z_1^{\gamma-1}\ z) - (\alpha + \beta + \gamma)\, \Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} a_{1\alpha_2\beta_3\gamma} X_1^\alpha Y_1^\beta Z_1^\gamma = 0$$

Como esta última suma es nula por pertenecer el punto (X_1, Y_1, Z_1) a la curva, queda

$$\Sigma \frac{n!}{\alpha!\ \beta'!\ \gamma!} a_{1\alpha_2\beta_3\gamma} (\alpha \cdot X_1{}^{\alpha-1}\, x\, Y_1{}^{\beta}\, Z_1{}^{\gamma} + \beta \cdot X_1{}^{\alpha}\, Y_1{}^{\beta-1}\, y\ Z_1{}^{\gamma} +$$

$$+ \gamma \cdot X_1{}^{\alpha}\, Y_1{}^{\beta}\ Z_1{}^{\gamma-1}\, z) = 0$$

Como en los casos antes tratados, esta expresión puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Sigma \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!} a_{1\alpha_2\beta_3\gamma} (X_1\, X_1 \ldots X_1\, x\, Y_1\, Y_1 \ldots Y_1\, Z_1\, Z_1 \ldots Z_1 +$$

$$+ X_1\, X_1 \ldots x\, X_1\, Y_1\, Y_1 \ldots Y_1\, Z_1\, Z_1 \ldots Z_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \ldots + \overbrace{x\, X_1\, X_1 \ldots X_1\, Y_1\, Y_1 \ldots Y_1\, Z_1\, Z_1 \ldots Z_1}^{\alpha} +$$

$$+ X_1\, X_1 \ldots X_1\, Y_1\, Y_1 \ldots Y_1\, y\, Z_1\, Z_1 \ldots Z_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \ldots + \overbrace{X_1\, X_1 \ldots X_1\, y\, Y_1\, Y_1 \ldots Y_1\, Z_1\, Z_1 \ldots Z_1}^{\beta} +$$

$$+ X_1\, X_1 \ldots X_1\, Y_1\, Y_1 \ldots Y_1\, Z_1\, Z_1 \ldots Z_1\, z + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \ldots + \overbrace{X_1\, X_1 \ldots X_1\, Y_1\, Y_1 \ldots Y_1\, z\, Z_1\, Z_1 \ldots Z_1}^{\gamma}) = 0 \qquad (9)$$

que representa la ecuación de a tangente en el punto (X_1, Y_1, Z_1). En cada sumando del paréntesis intervienen α veces la X_1, β veces las Y_1 y γ veces las Z_1, incluyendo las variables x, y, z.

La ecuación de la curva (7), puede ponerse de esta forma:

$$\Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}\ a_{1\alpha_2\beta_3\gamma}(\overbrace{xx \ldots x}^{\alpha}\overbrace{yy \ldots y}^{\beta}\overbrace{zz \ldots z}^{\gamma}) = 0 \qquad (10)$$

Comparando las dos ecuaciones (9) y (10), podemos decir en general, que puesta la ecuación de la curva en la forma (10), se obtiene la de la tangente sustituyendo sucesiva y ordenadamente $(n - 1)$ de las n variables por las respectivas coordenadas del punto de contacto.

LA FUNCION CARACTERISTICA DE CUATRO ALGORITMOS ESTOCASTICOS

por

DARÍO MARAVALL CASESNOVES

En una obra que estoy escribiendo para la editorial brasileña Glôbo sobre la Teoría y Aplicaciones de los Procesos Estocásticos, y en una memoria publicada en la *Revista de la Academia de Ciencias* sobre Nuevos modelos de Distribuciones y de Procesos Estocásticos, puede verse una investigación más profunda y detallada, así como numerosas aplicaciones de los resultados que obtengo en este artículo.

Proyección de vectores aleatorios isótropos en espacios euclideos de n *dimensiones*

La función de frecuencias de un vector aleatorio isótropo en un espacio euclideo de n dimensiones y en coordenadas cartesianas es de la forma:

$$f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}) \tag{1}$$

Así es que su función característica es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x^2})\, e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)}\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_0^{\infty} f(r) r^{n-1}\, dr \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{\,ir(t_1 \cos\omega_1 + \dots)} \operatorname{sen}^{n-2}\omega_1 \dots \operatorname{sen}\omega_{n-2}\, d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \tag{2}$$

y haciendo en ella $t_2 = \dots = t_n = 0$, se obtiene la función característica de la distribución marginal de x_1, o sea de la proyección del vector aleatorio isótropo sobre un eje coordenado. Si llamamos φ (t) a esta función, se tiene:

$$\varphi(t) = c \int_0^{\infty} f(r) r^{n-1} dr \int_0^{\pi} e^{itr\cos\omega_1} \operatorname{sen}^{n-2} \omega_1 d\omega_1 \tag{3}$$

siendo c:

$$c = \int_0^{\pi} \dots \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{n-3} \omega_2 \dots \operatorname{sen} \omega_{n-2}\, d\omega_2 \dots d\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{4}$$

y por ser la segunda integral de (3) una forma conocida de las funciones J de Bessel, es:

$$t^{\frac{n}{2}-1}\, \varphi(t) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} r^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(tr)\, f(r) dr \tag{5}$$

Por tanto, $t^{\frac{n}{2}-1}\, \varphi(t)$ es, salvo un factor numérico la transformada de Hankel de orden $\frac{n}{2} - 1$, de la función $r^{\frac{n}{2}-1} f(r)$. Y como esta transformación es recíproca, también se tiene:

$$r^{\frac{n}{2}-1} f(r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\infty} \lambda^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)\, \varphi(\lambda) d\lambda \tag{6}$$

en el caso particular del espacio de tres dimensiones, las transformadas de Hankel se convierten en transformadas por seno de Fourier por ser:

$$J_{\frac{1}{2}}(tr) = \sqrt{\frac{2}{\pi t r}} \quad \operatorname{sen}(tr) \tag{7}$$

Por ser las transformada enedimensional de Fourier de una función de simetría esférica, también de simetría esférica, se tiene la siguiente relación entre la función característica de la distribución conjunta de $x_1, x_2, \dots, x_n$ y de la distribución marginal de x_1:

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_1, 0, \dots, 0) \quad ; \quad \varphi(t_1, t_2, \dots t_n) = \varphi\left(\sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2}\right) \tag{8}$$

Se pueden emplear las fórmulas (5) y (6) para resolver los problemas relativos a la proyección de un vector aleatorio isótropo de un espacio euclideo de n dimensiones sobre un subespacio euclideo de m dimensiones ($m \leqslant n$). En efecto dicha proyección es también un vector aleatorio isótropo, debido a la ausencia de direcciones privilegiadas, cuya proyección sobre un eje coordenado es la misma que la del vector primitivo. Por tanto, a partir de $f_n(r)$ (función de frecuencias correspondiente al espacio de n dimensiones) por medio de (5) se calcula $\varphi(t)$ (correspondiente a un eje coordenado), y utilizando (6) con sólo sustituir n por m se calcula $f_m(r)$ (correspondiente al espacio de m dimensiones) a partir de $\varphi(t)$. Se tiene:

$$r^{\frac{m}{2}-1} f_m(r) = (2\pi)^{-\frac{n-m}{2}} \int_0^\infty \mu^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(\mu r) d\mu \int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\mu\lambda) f_n(\lambda) d\lambda \qquad (9)$$

Adición de variables aleatorias en número aleatorio.

Defino con este nombre el siguiente algoritmo estocástico: Sean $n_1, \ldots, n_m$, m números aleatorios enteros y positivos, cuya función característica y función de frecuencias son respectivamente $\psi(s_1, \ldots, s_m)$, y $p(n_1, \ldots, n_m)$. Y sean β_{jkv}, variables aleatorias, tales que el primer subíndice j varía de 1 a m, el segundo k, varía de 1 a r_1, o r_2, ..., o r_m, según que j sea igual a 1, ..., o m; y el tercero v varía de 1 a n_1, ..., o n_m, también según que j sea igual a 1, ..., o m. Definimos las variables aleatorias α_{jk}, cuyos subíndices coinciden con los dos primeros de las β, por las sumas:

$$\alpha_{jk} = \sum_{v=1}^{n_j} \beta_{jkv} \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots, r_j \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (10)$$

son, pues, la suma en número aleatorio n_j de las β_{jkv}; y estas últimas son tales que para j fijo cualquiera que sea v, con tal de que sea el mismo para todas, la función característica de su distribución conjunta es

$$\varphi_j(t_{j1}, \ldots, t_{jk}, \ldots, t_{jn_j}) \qquad (11)$$

naturalmente independiente de v, y además aquellas que difieran en uno al menos de los subíndices j o v, son independientes entre sí, y todas las que tienen el mismo j, se subdividen en grupos con el mismo v, tal que dos de estos grupos tienen la misma ley de probabilidad.

Entonces la función características de la distribución conjunta de las α_{jk}, y de las n_j es:

$$\sum_{n_1=0;\ldots;n_m=0}^{\infty} p(n_1, \ldots, n_m)\, e^{\sum_{j=1}^{m} i\, s_j\, n_j} \prod_{j=1}^{m} [\varphi_j(t_{j1}, \ldots, t_{jk}, \ldots)]^{n_j} =$$

$$= \sum_{n_1=0;\ldots n_m=0}^{\infty} p(n_1, \ldots, n_m) e^{\sum_{j=1}^{m} n_j [i s_j + \ln \varphi_j(t_{j1}, \ldots, t_{jk}, \ldots)]} =$$

$$= \psi\left[\ldots, s_j + \frac{\ln \varphi_j(t_{j1}, \ldots, t_{jk}, \ldots)}{i}, \ldots\right] \qquad (12)$$

La función característica de la distribución marginal de las α_{jk}, se obtiene haciendo $s_1 = \ldots = s_m = 0$, en (12), y ésta es la de la suma en número aleatorio de variables aleatorias.

En el caso particular en que las m variables $n_1, \ldots, n_m$, se reducen a una sola n, la fórmula (12) se transforma en la más sencilla:

$$\psi\left[s + \frac{\ln \varphi(t_1, \ldots, t_r)}{i}\right] \quad ; \quad \psi\left[\frac{\ln \varphi(t_1, \ldots, t_r)}{i}\right] \tag{13}$$

la de la izquierda representa la función característica de la distribución conjunta y la de la derecha la de la distribución marginal de las α_k, ya que en este caso es (10):

$$\alpha_k = \sum_{v=0}^{n} \beta_{kv} \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{14}$$

Si además las β son independientes entre sí, entonces es:

$$\varphi(t_1, \ldots, t_r) = \varphi_1(t_1) \ldots \varphi_r(t_r) \tag{15}$$

y (13) se transforma en:

$$\psi\left[s + \frac{\sum_{k=1}^{r} \ln \varphi_k(t_k)}{i}\right] \quad ; \quad \psi\left[\frac{\sum_{k=1}^{r} \ln \varphi_k(t)}{i}\right] \tag{16}$$

En el caso aún más particular en que las α_k, se reducen a una sola variable α, entonces es:

$$\alpha = \sum_{v=0}^{n} \beta_v \quad ; \quad \psi\left(s + \frac{\ln \varphi(t)}{i}\right) \quad ; \quad \psi\left(\frac{\ln \varphi(t)}{i}\right) \tag{17}$$

en lo que se convierten (14) y (13).

En este último caso puede ser interesante la inversión de este algoritmo estocástico, es decir: hallar la distribución condicional de n para un α fijo. He obtenido como resultado para la función característica de esta distribución condicional:

$$\psi(s ; \alpha) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(s + \frac{\ln \varphi(t)}{i}\right) e^{-it\alpha}\, dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{\ln \varphi(t)}{i}\right) e^{-it\alpha}\, dt} \tag{18}$$

Multiplicación de variables aleatorias.

Dadas dos variables aleatorias x_1, x_2, no independientes, cuya función de frecuencias conjunta es $f_{12}(x_1, x_2)$, se tiene para la función característica del producto $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx_1x_2} f_{12}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx_1x_2} f_1(x_1)\, f_2(x_2; x_1)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\, \varphi_2(tx_1; x_1)\, dx_1 \qquad (19)$$

en la que $f_1(x_1)$ es la función de frecuencias de la distribución margina de x_1, y $f_2(x_2 ; x_1)$ y $\varphi_2(t ; x_1)$ las funciones de frecuencias y característica de la distribución condicional de x_2 para un x_1 fijo.

Sea, por ejemplo, el producto de dos variables aleatorias normales reducidas, cuyo coeficiente de correlación es r, por aplicación de la fórmula (19) se encuentra:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(x_1^2 + x_2^2 - 2rx_1x_2/2\,(1-r^2)]+itx_1x_2}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-[it(1-r^2)+r]^2}} \qquad (20)$$

a la que corresponde la función de frecuencias:

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\, e^{rz/(1-r^2)}\, K_0\left(\frac{z}{1-r^2}\right) \qquad (21)$$

K_0 es una función de Bessel.

La fórmula (19) se simplifica, cuando ambas variables x_1 y x_2, son independientes, y entonces se tiene:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\, \varphi_2(tx_1)\, dx_1 \qquad (22)$$

en la que $f_1(x_1)$ es la función de frecuencias de x_1, y $\varphi_2(t)$ la función característica de x_2.

Así, por ejemplo, en el caso de dos variables normales reducidas independientes (20) y (21) se transforman respectivamente en:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad ; \quad \frac{1}{\pi} K_0(z) \qquad (23)$$

División de variables aleatorias.

En este caso con las mismas notaciones, que en el caso anterior, se obtiene para la función característica del cociente x_1/x_2 de dos variables aleatorias no independientes:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx_1/x_2} f_2(x_2) f_1(x_1\ ;\ x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1\left(\frac{t}{x_2}\ ;\ x_2\right) f_2(x_2)dx_2 \qquad (24)$$

y en el caso de independencia:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1\left(\frac{t}{x_2}\right) f_2(x_2)dx_2 \qquad (25)$$