NOTAS DE DIVULGACION

por

LEONCIO FERNANDEZ MAROTO

I

SOBRE RAICES n-simas de LA UNIDAD

Es sabido (Vid. *A. Alg.*, J. Rey Pastor, párr. 399) que los productos, cocientes y potencias de exponente natural de las raíces n-simas de 1, son también raíces n-simas de 1. Ahora bien, si consideramos el resultado de una de las referidas operaciones, puede plantearse la cuestión de determinarlo ordinalmente, es decir, responder a la pregunta: ¿Cuál, de entre las n raíces n-simas de 1 es el resultado de la operación? La presente nota elemental intenta, sin pretensión alguna de originalidad en los resultados, dar solución a dicho problema.

Para ello se impone, en primer lugar, la ordenación de los datos. Un criterio sencillo de ordenación de las n-raíces n-simas de 1:

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$$

es, como se acostumbra, designarlas por una letra, común para todas ellas, afectada de un subíndice que coincida con el correspondiente valor de k, en esta forma, y siendo n el índice que se considera,

$$\varepsilon_k^{(n)} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \quad [k = 0, 1, 2, \ldots (n - 1)]$$

Sentada esta premisa, examinemos sucesivamente los productos, potencias y cocientes de los números $\varepsilon_k^{(n)}$.

Productos.—Sean $\varepsilon_p^{(n)}$ y $\varepsilon_q^{(n)}$, con p y q nulos o naturales menores o iguales que $(n - 1)$. Tenemos:

$$\varepsilon_p^{(n)} \cdot \varepsilon_q^{(n)} = \left[\cos \frac{2p\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2p\pi}{n}\right]\left[\cos \frac{2q\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2q\pi}{n}\right] =$$

$$= \left[\cos \frac{2(p+q)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2(p+q)\pi}{n}\right] = \varepsilon_{p+q}^{(n)}$$

Teniendo en cuenta que $\varepsilon_n^{(n)} = \varepsilon_o^{(n)}$; $\varepsilon_{n+1}^{(n)} = \varepsilon_1^{(n)}, \ldots \varepsilon_{2n}^{(n)} = \varepsilon_o^{(n)}, \ldots$, será preciso hallar el resto de la división entera de $(p + q)$ entre n, a fin de establecer el subíndice que corresponde al producto; pero si advertimos que ha de ser $p + q \leqslant 2n - 2$, basta restar n, si $p + q \geqslant n$, y dejarlo sin alteración si es $p + q \leqslant (n - 1)$. Llamando, no obstante, ρ al mencionado resto, tenemos la siguiente regla de multiplicación:

$$\boxed{\varepsilon_p^{(n)} \cdot \varepsilon_q^{(n)} = \varepsilon_\rho^{(n)}}$$

Ejemplos:

$$\varepsilon_5^{(7)} \cdot \varepsilon_1^{(7)} = \varepsilon_6^{(7)} = \cos \frac{12\pi}{7} + i \operatorname{sen} \frac{12\pi}{7}$$

$$\varepsilon_0^{(4)} \cdot \varepsilon_3^{(4)} = \varepsilon_3^{(4)} \text{ (ya que, para todo } n \text{ natural, es } \varepsilon_o^{(n)} = 1)$$

$$\varepsilon_9^{(9)} \cdot \varepsilon_6^{(9)} = \varepsilon_6^{(9)} = \cos \frac{12\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{12\pi}{9}$$

Potencias.—Sea $\left[\varepsilon_p^{(n)}\right]^m$, siendo $p \leqslant (n - 1)$ natural o nulo, y m natural cualquiera. Tendremos:

$$\left[\varepsilon_p^{(n)}\right]^m = \left[\cos \frac{2p\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2p\pi}{n}\right]^m = \cos \frac{2pm\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2pm\pi}{n} = \varepsilon_{p\cdot m}^{(n)}$$

También aquí hemos de hallar el resto ρ de la división entera de $p \cdot m$ entre n, para establecer el subíndice que corresponde a la potencia, y así obtenemos la regla de potenciación

$$\boxed{\left[\varepsilon_p^{(n)}\right]^m = \varepsilon_\rho^{(n)}}$$

Ejemplo.—Probar que el determinante de Vandermonde

$$V\left(\varepsilon_0^{(n)}, \varepsilon_1^{(n)}, \varepsilon_2^{(n)}, \ldots \varepsilon_{n-1}^{(n)}\right)$$

es un determinante simétrico.

El referido determinante es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . \quad . \quad . & 1 \\ \varepsilon_0^{(n)} & \varepsilon_1^{(n)} & \varepsilon_2^{(n)} & \varepsilon_3^{(n)} & \varepsilon_4^{(n)} & . \quad . \quad . & \varepsilon_{n-1}^{(n)} \\ \left[\varepsilon_0^{(n)}\right]^2 & \left[\varepsilon_1^{(n)}\right]^2 & \left[\varepsilon_2^{(n)}\right]^2 & \left[\varepsilon_3^{(n)}\right]^2 & \left[\varepsilon_4^{(n)}\right]^2 & \cdots & \left[\varepsilon_{n-1}^{(n)}\right]^2 \\ \left[\varepsilon_0^{(n)}\right]^3 & \left[\varepsilon_1^{(n)}\right]^3 & \left[\varepsilon_2^{(n)}\right]^3 & \left[\varepsilon_3^{(n)}\right]^3 & \left[\varepsilon_4^{(n)}\right]^3 & \cdots & \left[\varepsilon_{n-1}^{(n)}\right]^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left[\varepsilon_0^{(n)}\right]^{n-1} & \left[\varepsilon_1^{(n)}\right]^{n-1} & \left[\varepsilon_2^{(n)}\right]^{n-1} & \left[\varepsilon_3^{(n)}\right]^{n-1} & \left[\varepsilon_4^{(n)}\right]^{n-1} & \cdots & \left[\varepsilon_{n-1}^{(n)}\right]^{n-1} \end{vmatrix}$$

Basta aplicar la regla obtenida, y poniendo en la primera columna todos sus elementos iguales a la unidad, por ser $\varepsilon_0^{(n)} = 1$, obtenemos (prescindiendo del índice n para mayor sencillez de notación):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 & \varepsilon_6 & \varepsilon_8 & \cdots & \varepsilon_{n-2} \\ 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_6 & \varepsilon_9 & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-3} & \cdots & & \varepsilon_1 \end{vmatrix}$$

lo cual demuestra lo que pretendíamos.

Cocientes.—Sea el cociente $\dfrac{\varepsilon_p^{(n)}}{\varepsilon_q^{(n)}}$, con p y q en los supuestos de costumbre. Se tendrá:

$$\frac{\varepsilon_p^{(n)}}{\varepsilon_q^{(n)}} = \frac{\cos \dfrac{2\pi p}{n} + i \operatorname{sen} \dfrac{2\pi p}{n}}{\cos \dfrac{2q\pi}{n} + i \operatorname{sen} \dfrac{2q\pi}{n}} = \cos \frac{2(p-q)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2(p-q)\pi}{n} = \varepsilon_{p-q}^{(n)}$$

Pero en este caso hemos de distinguir dos supuestos:

a) Que sea $p > q$. En tal hipótesis $(p - q)$ es un número natural que es el subíndice correspondiente al cociente. Si hacemos $p - q = s$, será

$$\boxed{\frac{\varepsilon_p^{(n)}}{\varepsilon_q^{(n)}} = \varepsilon_s^{(n)}}$$

b) Que sea $p < q$. Entonces, sea $p - q = - s$. No hemos definido índices negativos, pero sabemos que el resultado es, en todo caso, una raíz enésima de la unidad. Veamos cuál de ellas es; es decir, qué índice le corresponde según el criterio de ordenación adoptado. El valor del cociente es

$$\frac{\varepsilon_p^{(n)}}{\varepsilon_q^{(n)}} = \cos\frac{-2s\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{-2s\pi}{n} = \cos\frac{2s\pi}{n} - i \operatorname{sen}\frac{2s\pi}{n}.$$

Pero como se sabe que si en la expresión

$$\varepsilon_k^{(n)} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$$

se da a k dos valores complementarios a n, se obtienen dos raíces conjugadas, es decir, que si se cambia k en $(n - k)$ se obtiene (Vid. *Trigonométrie*, J. A. Serret, pág. 210):

$$\cos\frac{2k\pi}{n} - i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$$

concluímos que en el caso que nos ocupa, la raíz obtenida debe ser la de índice $(n - s)$. En efecto:

$$\varepsilon_{n-s}^{(n)} = \cos\frac{2(n-s)\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2(n-s)\pi}{n} = \cos\frac{2\pi s}{n} - i \operatorname{sen}\frac{2s\pi}{n}.$$

Obtenemos por todo ello la regla de división para el caso $p < q$, siendo $p - q = - s$.

$$\boxed{\frac{\varepsilon_p^{(n)}}{\varepsilon_q^{(n)}} = \varepsilon_{n-s}^{(n)}}$$

EJEMPLOS:

$$\frac{\varepsilon_6^{(7)}}{\varepsilon_4^{(7)}} = \varepsilon_2^{(7)} = \cos\frac{4\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}$$

$$\frac{\varepsilon_3^{(9)}}{\varepsilon_7^{(9)}} = \varepsilon_5^{(9)} = \cos\frac{10\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{10\pi}{9}$$

El segundo supuesto de la división, tal como se ha resuelto, permite dar solución al caso de potenciación con exponente entero negativo. En efecto,

$$\left[\varepsilon_p^{(n)}\right]^{-m} = \frac{1}{\left[\varepsilon_p^{(n)}\right]^m} = \frac{1}{\varepsilon_\rho^{(n)}} = \frac{\varepsilon_0^{(n)}}{\varepsilon_\rho^{(n)}} = \varepsilon_{-\rho}^{(n)} = \varepsilon_{n-\rho}^{(n)}$$

Bibliografía:

J. Rey Pastor: *Análisis algebraico.* Cap. XI, párrafos 399 a 401.
J. A. Serret: *Traité de Trigonométrie.* Chapitre V, párrafo 167.
Enciclopedia delle Matematiche Elementari. (Berzolari, Vivanti, Gigli.) Art. XV, párrafos 34 a 41.
E. Pascal: *Repertorium der Höheren Analysis,* I, 1, Kapitel IV, págs. 311 y sigs.

II

GENERALIZACION DE UN PROBLEMA DE RECURRENCIA

Recientemente ha sido propuesto en una de las Escuelas de Ingeniería, y en sus exámenes de ingreso, el siguiente problema:

»La función $\varphi(n)$ toma los valores 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0 ..., cuando $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Expresar $\varphi(n)$ en función de n mediante una fórmula en la que no figuren funciones trigonométricas.»

El propósito de la presente nota es generalizar este problema en el sentido que más adelante indicaremos, demostrando que tiene solución y hallándola. Procedamos previamente a resolver el problema planteado. Una forma de resolución es la siguiente:

Observando la periodicidad de los valores de φ, deducimos que se verifica para todo n, nulo o natural, que

$$\varphi(n+4) = \varphi(n)\ , \text{ o bien } \varphi(n+4) - \varphi(n) = 0 \qquad [1]$$

que es una ecuación de recurrencia o en diferencias finitas, lineal y homogénea, cuya ecuación característica es

$$r^4 - 1 = 0 \qquad [2]$$

ecuación binomia, cuyas raíces son 1, i, (-1) y $(-i)$. La solución genera de [1] será, por ello,

$$\varphi(n) = c_1 + c_2\, i^n + c_3 \cdot (-1)^n + c_4(-i)^n \qquad [3]$$

en donde c_1, c_2, c_3, c_4 son constantes arbitrarias. Mas como para $n = 0, 1, 2, 3$, la función $\varphi(n)$ toma los valores 1, 0, 0, 0, respectivamente, si en [3] damos a n los valores 0, 1, 2, 3, obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 \\ c_1 + ic_2 - c_3 - ic_4 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 - c_4 = 0 \\ c_1 - ic_2 - c_3 + ic_4 = 0 \end{array}\right\} \qquad [4]$$

que nos permite hallar los valores buscados de las constantes. Estas resultan ser

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{4}$$

Por ello, la función buscada, sustituyendo estos valores en [3], adoptará la forma:

$$\varphi(n) = \frac{1 + i^n + (-1)^n + (-i)^n}{4} \qquad [5]$$

Fácilmente se comprueba que esta función satisface las condiciones del enunciado.

Parece natural la generalización del problema que nos ocupa, tratando de hallar una función $\varphi(n)$, que tome los valores

$$\underbrace{a, b, c, d, \ldots, m}_{h} \quad ; \quad \underbrace{a, b, c, d, \ldots, m}_{h} \quad ; \quad a, b, c, \ldots$$

siendo $(\underbrace{a, b, c, d, \ldots m}_{h})$ números cualesquiera, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Sigamos el mismo procedimiento de resolución. En este caso será

$$\varphi(n + h) = \varphi(n) \qquad [5]$$

y la ecuación característica de esta ecuación lineal homogénea es

$$r^h = 1 \qquad [6]$$

cuyas raíces son las h raíces h-ésimas de la unidad positiva:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{h} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{h} \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots (h - 1)] \qquad [7]$$

La solución general será, por ello,

$$\boxed{\varphi(n) = c_0 \cdot \varepsilon_0^n + c_1 \cdot \varepsilon_1^n + c_2 \cdot \varepsilon_2^n + \dots + c_{h-1}\, \varepsilon_{h-1}^n} \qquad [8]$$

y, dadas las condiciones iniciales, ha de verificarse el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{h-1} = a \\ \varepsilon_0 c_0 + \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 + \varepsilon_3 c_3 + \dots + \varepsilon_{h-1} c_{h-1} = b \\ \varepsilon_0^2 c_0 + \varepsilon_1^2 c_1 + \varepsilon_2^2 c_2 + \varepsilon_3^2 c_3 + \dots + \varepsilon^2_{h-1} c_{h-1} = c \\ \varepsilon_0^3 c_0 + \varepsilon_1^3 c_1 + \varepsilon_2^3 c_2 + \varepsilon_3^3 c_3 + \dots + \varepsilon^3_{h-1} c_{h-1} = d \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_0^{h-1} c_0 + \varepsilon_1^{h-1} c_1 + \varepsilon_2^{h-1} c_2 + \varepsilon_3^{h-1} c_3 + \dots + \varepsilon_{h-1}^{h-1} c_{h-1} = m \end{array}\right\} \qquad [9]$$

Este sistema tiene solución única, puesto que el determinante de os coeficientes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_{h-1} \\ \varepsilon^2_0 & \varepsilon^2_1 & \varepsilon^2_2 & \varepsilon^2_3 & \dots & \varepsilon^2_{h-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_0^{h-1} & \varepsilon_1^{h-1} & \varepsilon_2^{h-1} & \varepsilon_3^{h-1} & \dots & \varepsilon_{h-1}^{h-1} \end{vmatrix} \qquad [10]$$

es un determinante de Vandermonde, distinto de cero, por ser distintos entre sí los h números $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_{h-1}$. Para hallar dicha solución única y calcular así el valor de las h constantes c_j $[j = 0, 1, \dots, (h - 1)]$ puede ser utilizada la regla de Cramer, pero es más conveniente (1) emplear el siguiente procedimiento: Se divide cada una de las ecuaciones [9] por el coeficiente que en ella tiene la constante cuyo valor se desea hallar, y se suman después todas las ecuaciones. Al operar así se anulan los coeficiente de todas las incógnitas (2) menos el de la que buscamos, que resulta ser h. Se obtiene así, suponiendo que sea c_j la constante que se calcula:

$$h \cdot c_j = a + \frac{b}{\varepsilon_j} + \frac{c}{\varepsilon_j^2} + \frac{d}{\varepsilon_j^3} + \dots + \frac{m}{\varepsilon_j^{h-1}}$$

y por tanto,

$$\boxed{c_j = \frac{1}{h}\left[a + \frac{b}{\varepsilon_j} + \frac{c}{\varepsilon_j^2} + \frac{d}{\varepsilon_j^3} + \dots + \frac{m}{\varepsilon_j^{h-1}}\right]} \qquad [11]$$

(1) Véase J. Rey Pastor, *Algebra*, «Resolución de las ecuaciones cíclicas», pág. 249. ed. 1947, o J. Barinaga, *Seis conferencias*, Madrid, 1938, «El concepto de la resolubilidad de las ecuaciones», pág. 19.

(2) Una forma de demostrar esto es la siguiente: Al despejar c_j, hemos de dividir la primera de lasec uaciones [9] por $\varepsilon^0_j = 1$, la segunda por ε_j, ... la h-ésima por ε_j^{h-1},

expresión que, juntamente con la [8], resuelve el problema planteado en general. Puede comprobarse que [11] da los valores hallados anteriormente en el caso particular $h = 4$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$. Si j, que puede tomar los valores 0, 1, 2, ... $(h - 1)$, vale cero, entonces, por ser $\varepsilon_0 = 1$, el valor de c_0 es

$$c_0 = \frac{1}{h}(a + b + c + d + \ldots + m) \qquad [12]$$

o sea que es la media aritmética de los h primeros valores de la función $\varphi(n)$.

Sea c_p (p, nulo o natural menor o igual que $h - 1$) otra constante cualquiera entre la h, Como sus coeficientes son $\varepsilon_p^0 = 1$, ε_p, ε_p^2, ... ε_p^{h-1}, hemos de probar que

$$\frac{\varepsilon_p^0}{\varepsilon_j^0} + \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_j} + \frac{\varepsilon_p^2}{\varepsilon_j^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_p^{h-1}}{\varepsilon_j^{h-1}} = 0$$

a sea teniendo en cuenta las reglas del cálculo entre raíces de la unidad (véase nota anterior)

$$1 + \varepsilon_{(p-j)} + \varepsilon^2_{(p-j)}, + \ldots + \varepsilon_{(p-j)}^{h-1} = 0$$

Llamemos $p - j = s$ [Si $p < j$, será negativo s, y correspondería un subíndice $(h - s)$] La tesis será

$$1 + \varepsilon_s + \varepsilon_s^2 + \ldots + \varepsilon_s^{h-1} = 0 \qquad [\alpha]$$

Y para probarla basta expresar cada ε_s^k $(k = 0, 1, 2, \ldots h - 1)$ en forma trigonométrica

$$\varepsilon_s^k = \cos\frac{2ks\pi}{h} + i \operatorname{sen}\frac{2ks\pi}{h}$$

y emplear las fórmulas de adición de argumentos en progresión aritmética, con las que se pone en evidencia que

$$\sum_{k=0}^{h-1} \cos\frac{2ks\pi}{h} = 0 \text{ y } \sum_{k=0}^{k=h-1} \operatorname{sen}\frac{2ks\pi}{h} = 0,$$ lo cual prueba $[\alpha]$, *q. e. d. o.*