APLICACIÓN DE LA LÓGICA POLIVALENTE A LA TEORÍA DE NÚMEROS

por

MARÍA DE LA CINTA BADILLO BARALLAT

Definido e interpretado el concepto de función negativa generalizada, o función rotativa, en un trabajo anterior (1), vamos a tratar ahora una aplicación de él en el campo matemático.

El primer sistema de números, fundamento y principio de los demás, es el de los números naturales : 1, 2, 3, ... Sirve de punto de partida para construir sistemas más elaborados y, además, al estudiar los diversos sistemas algebraicos, las funciones o representaciones del conjunto de números naturales desempeña un papel muy importante.

Se hacen las siguientes hipótesis, que son, en esencia, los axiomas de Peano :

1. El conjunto de números naturales es no vacío.
2. Existe una representación 1 — 1 (biunívoca) del conjunto en sí mismo, en la cual se hace corresponder a cada elemento el que le sigue.
3. El conjunto imagen obtenido es un subconjunto propio del conjunto de números naturales.
4. Cualquier subconjunto, que contenga un elemento sin sucesor y tal que contenga el sucesor de cada elemento en el conjunto, coincide con el conjunto de números naturales.

Se introducen a continuación los números fraccionarios, positivos y negativos, los cuales, con los números enteros, constituyen el sistema de números racionales.

Como, por un lado, estos números son insuficientes para poder realizar con ellos todas las operaciones aritméticas, y, por otro, se comprueba que existen puntos en la recta que no representan a ninguno de ellos, se amplía nuevamente el campo numérico, definiendo los números irracionales, formándose así con todos ellos, el sistema de números reales.

Admitiendo el postulado de continuidad, a cada número real le correspon-

---

(1) C. BADILLO : «Fundamentos en relación con lógica simbólica polivalente.» *Gaceta Matemática*. Primera Serie. Tomo VII. Núms. 1 y 2.

de un punto de la recta y a cada punto un número real, existiendo correspondencia 1 — 1.

Ahora bien, resulta que aún estos números no bastan para llevar a cabo todas las operaciones ni, consecuentemente, para resolver ecuaciones en todos los casos. Y, referente a la geometría, los números reales están representados gráficamente mediante los puntos de una recta, o sea el sistema de números reales podemos decir que es asociable con la geometría rectilínea ; pero, ¿y la geometría plana?, ¿y la del espacio de tres dimensiones?..., ¿y la de un espacio de n dimensiones?...

Se necesita ampliar ese campo para desarrollar la Matemática en sus múltiples facetas.

Se originó la ampliación, principalmente, al tratar de resolver la ecuación de segundo grado. Cuando $b^2 - 4ac$ es negativo no hay solución real y, hasta hace relativamente poco en la historia de la matemática, tal ecuación se consideró imposible. Matemáticos descubridores, de gran espíritu emprendedor : Cardan, Napier, Wallis, Leibniz y Gauss, aseguraron la existencia de un nuevo tipo de número, que Napier llama el fantasma de un número real, pero que, en nuestros días, se llama número complejo.

Vamos a realizar dicha ampliación de una manera lógica y precisa, que tenga uniformidad con las ampliaciones anteriores, de tal forma que cada una sea un caso particular de la ley general seguida y no haya nada anormal que se resista a ser admitido por nuestra mente.

Los números reales están definidos según una lógica binaria. La lógica del nuevo sistema numérico será tetravalente (2) y (3).

El valor absoluto de la unidad es el mismo que en los números reales ; lo que cambia es su signo. Así como el + y el — se interpretan geométricamente como representantes de dos sentidos de una recta, análogamente, el nuevo signo simboliza la distinta dirección que le corresponde. Las dos direcciones elegidas pueden ser cualesquiera ; ahora bien, se toman, para mayor sencillez, perpendiculares.

En cuanto a considerar la misma unidad afectada de distinto signo, no es absolutamente preciso en el sentido estricto de la palabra, pero sí lo es desde el momento en que queremos que el sistema de números reales esté comprendido en el ampliado y, a su vez, la geometría rectilínea quede incluída en la geometría plana.

Los nuevos números tendrán dos componentes reales correspondientes a las dos direcciones que definen el plano, distinguiéndose una de otra con un signo que expresa a cuál de las dos pertenece. Cada una de ellas tiene dos sentidos, los cuales se señalan de distinta manera (4). Es decir, se consideran cuatro sentidos, caracterizados por cuatro signos diferentes, teniendo,

---

(2) «Automatización de los silogismos en una lógica polivalente.» *Cálculo Automático y Cibernética.* Núm. 14. Págs. 1-11.

(3) «Esquemas representativos regidos por una lógica polivalente.» Idem. Núm. 9. Págs. 54-63.

(4) «El Algebra de la lógica polivalente en la Cibernética del Cálculo Automático Aritmético. Idem. Núm. 6. Págs. 3-18.

en resumen, el esquema I como sistema representativo: los signos $+'$ y $-'$ desempeñan el mismo papel que los $+$ y $-$, con la única diferencia que los primeros sirven para señalar los dos sentidos sobre la recta vertical y los segundos sobre la otra dirección elegida. Los introducidos se leen «más prima» y «menos prima».

Desde luego se tendrá:

$-' 3 = -(+' 3)$, esto, para cualquier número, es decir, se verifica en general:

$$-'m = -(+'m)$$

Paralelamente a como la medida de una magnitud negativa es tal que sumada con la de su opuesta da cero, es decir, $-m + m = 0$, en este sistema ampliado, basado en una lógica tetravalente, será:

$$+' m^2 + m^2 = 0 \quad ; \quad +' m^2 - m^2 = 0 \quad ; \quad -' m^2 + m^2 = 0 \quad ;$$
$$-' m^2 - m^2 = 0,$$

o sea, si se suman los cuadrados de las medidas de dos magnitudes ortogonales resulta cero.

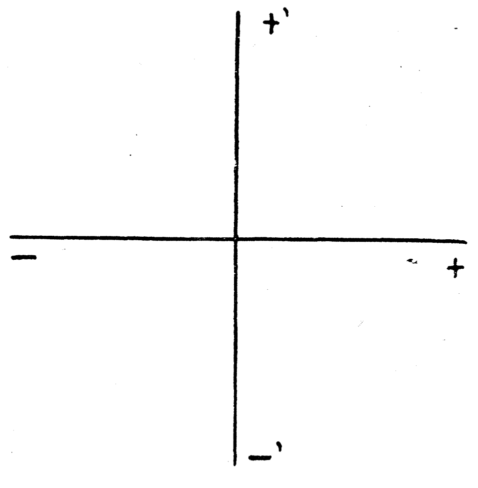

Figura 1

Esto en el supuesto de que:

Signo más prima y signo menos prima simbolizan los dos sentidos de una dirección perpendicular a la anterior.

En el método de Gauss (1797), se representa un número complejo $(a \pm ib)$ por un punto (a, b), referido a unos ejes cartesianos rectangulares, de la manera familiar, figura 2.

A cada punto P del plano corresponde un par de números (a, b) y un número llamado *complejo*, $a + ib$. Hay correspondencia 1 — 1 entre los puntos finitos del plano y los números complejos finitos. Por eso el plano se llama de números complejos o plano de Gauss.

Los números reales se representan por puntos sobre el eje XX′ o por pares de números del tipo (a, o), donde a puede ser positivo, negativo o nulo.

El símbolo i se define como una operación sobre los números reales que cambia el par real (a, b) sobre el que opera en $(-b, a)$ o, geométricamente,

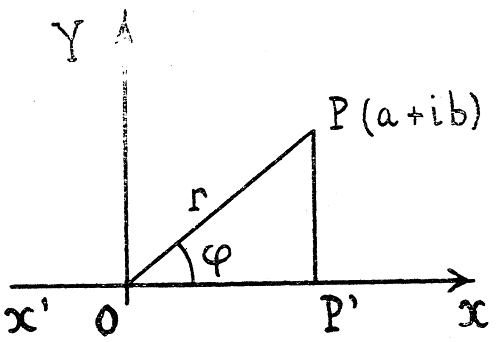

Figura 2

el operador i se define como aquel que hace girar la semirrecta OP, en un sentido positivo, un ángulo recto (figura 3). En ese círculo, supuesto su radio positivo, si se repite la operación, OP gira hasta OR, dos ángulos rectos... Si $z = a + ib$, entonces iz, iiz, $iiiz = i^3z$, $iiiiz = i^4z$ designan los nú-

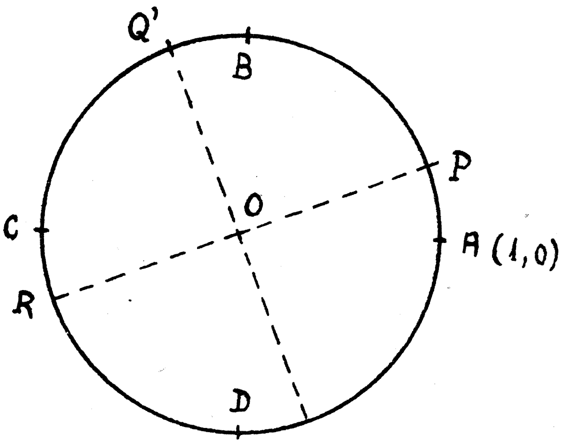

Figura 3

meros complejos correspondientes a Q, R, S, P, vértices de un cuadrado centrado en O para todos los valores no nulos de z.

En particular, si $z = 1$ y P coincide con A, i, i^2 i^3, i^4 corresponden a los puntos B, C, D, A.

Visto ya que no es necesario introducir una unidad nueva, ni operador alguno para definir los nuevos números, naturalmente, no será adecuado el nombre de componente imaginaria atribuído hasta ahora a una de las partes del número complejo, pues es tan real como la otra. Las llamaremos primera componente y segunda componente. Los ejes considerados recibirán los nombres de real^0 y real^1; real^0 el XX′ (de signos +, —) y real^1, el YY′ (de signos +′, —′). Lo único que cambian entre sí es la dirección, estando ligadas una a otra por los convenios establecidos.

A fin de que la aritmética de números reales sea caso particular de ésta y la geometría rectilínea esté a su vez comprendida en la geometría plana, definiremos $+'1 = \sqrt{-1}$.

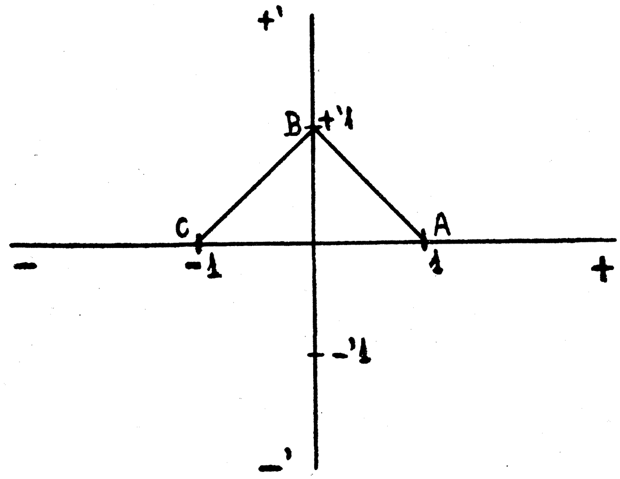

Figura 4

En el triángulo A B C de la figura 4, rectángulo en B, se verifica, por el teorema de la altura,

$$+'1 = \sqrt{1 \cdot (-1)} = \sqrt{-1},$$

que concuerda con la definición adoptada.

De ahí se deduce:

a) $\qquad -'1 = -\sqrt{-1}$

b) $\qquad (+'1)^2 = (-1) \times 1 = -1$

así como:

a') $\qquad 1 = \sqrt{1}$

b') $\qquad (1)^2 = (\sqrt{1})^2 = 1$

(El signo + se suprime siempre que no haya lugar a ninguna confusión.)

$$c) \quad (+' 1)^3 = (+' 1)^2 \cdot (+' 1) = -(+' 1) = -'1 = -\sqrt{-1}$$

$$d) \quad (+' 1)^4 = (+' 1)^2 \cdot (+' 1)^2 = -1 \quad -1 = 1$$

y se repiten los valores (+′ 1, — 1, —′ 1, 1) periódicamente, conforme todo ello con los convenios hechos al elegir el sistema representativo, y los cuatro únicos valores distintos son los determinados en la ya mencionada lógica tetravalente que rige y caracteriza el sistema.

Un número complejo puede representarse por dos letras del modo usual.

El criterio de igualdad es el expuesto en cualquier tratado y análogamente ocurre con las definiciones de complejos conjugados, opuestos, y lo referente a todas las operaciones, con los cambios pertinentes de i por el signo adecuado.

En otros artículos posteriores trataremos, Dios mediante, de generalizaciones muy interesantes, de las ecuaciones en general, particularmente las de segundo grado, y otros puntos de importancia relacionados con la teoría de los números complejos y otras a que ella da lugar.