LEONARDO FIBONACCI

BERTRAND RUSSELL

La extraordinaria personalidad de Bertrand Russell surge a principios del actual siglo. En dicha época se fundan tres escuelas matemáticas de gran potencia creadora: la formalista, cuyo jefe indiscutible es David Hilbert; la intuicionista, fundada por el holandés Brouwer, y la logística, acaudillada por Bertrand Russell.

Bertrand Russell es un filósofo y matemático inglés; ha sido profesor de la Universidad de Cambridge y fué depuesto en 1914 por su propaganda contra la guerra. Ha estudiado principalmente la relación entre la Lógica y la Matemática, la filosofía de las matemáticas y la teoría del conocimiento; ha tratado de unir, a imitación de Leibnitz, la matemática con la lógica, casi identificándolas. Difieren entre sí —frase de lord Russell— como un muchacho y un adulto: la lógica es la juventud, y la matemática la virilidad. Las obras más importantes de este autor son *Principles of mathematics*, *Introdution to mathematical philosophy* y *Fundations of Geometry.*

En los problemas fundamentales de filosofía, Russell sigue a G. E. Moore. Acepta de él la naturaleza no existencial de las proposiciones, salvo aquellas que expresan justamente existencia y su independencia de cualquier mente consciente, también el pluralismo (existente y de entidades) que considera al mundo como compuesto de un número infinito de entidades independientes entre sí con relaciones últimas. Matemáticamente sigue a Jorge Cantor, Peano y Frege principalmente.

Para Bertrand Russell, los signos referenciales de la matemática carecen de sentido convencional, resultando un sistema axiomático abstracto, en el cual axiomas y teoremas son únicamente funciones de dichos símbolos. Con esto se justifica la paradójica frase de Russell «la matemática es una ciencia en la cual nunca sabemos de qué hablamos ni si lo que decimos es exacto».

La logística moderna tiene sus precursores en la obra del español Raimundo Lulio *Ars Magna Combinatoria*, punto de partida de Leibnitz para crear el lenguaje simbólico universal, después están De Morgan, Boole, Peirce, Peano y, por fin, la obra *Principia Mathematica*, de Bertrand Russell, con la colaboración del Dr. Whitehead.

Para Bertrand Russell, en Filosofía Matemática, partimos de una serie de nociones-origen, de las cuales, procediendo por abstracción, tratamos de determinar los principios base sobre los que está construída la matemática. Entre estos principios base tenemos una serie de conceptos acerca de los cuales poseemos ideas intuitivas sobre su esencia o significado, aunque nos encontramos en la casi imposibilidad de dar una verdadera definición de ellos.

No es, sin embargo, evidente, para Russell, que existan estos términos primitivos sin definición posible, pues aunque para definir un término tengamos que recurrir a otros, que también tendremos que definir mediante otros nuevos, y éstos, a su vez, con otros, considera la posibilidad de que esto pudiera repetirse indefinidamente, o bien que sea posible llegar a términos que por su simplicidad no necesiten de una definición lógica; sin embargo, dada la limitación de la inteligencia o alcance humanos, supone que, al menos por ahora, deberemos comenzar con términos no definibles.

Este problema ha tratado de superarse mediante las llamadas definiciones implícitas o de tercera especie: introducción de entes sin significado preestablecido y, por tanto, sin que necesiten definición, representados por palabras o símbolos y que quedan determinados mediante unas condiciones o postulados que les haremos cumplir.

De todas formas, estas definiciones de tercera especie nos sirven únicamente para resolver el problema en la práctica, pero el problema lógico o filosófico no queda resuelto.

Según Bertrand Russell, la matemática pura clásica y la geometría analítica se pueden considerar aritmetizadas, o sea como totalmente compuestas de proposiciones referentes a los números reales; el sentido de esto parece ser que ellas pueden deducirse a partir de las propiedades de los números y de la lógica pura. Entonces, para conseguir el máximo fruto de esta teoría, se debe reducir al mínimo el número de premisas y términos no definidos necesarios.

Russell, en su obra *Principles of Mathematics*, trata de conseguir dos objetivos: probar que toda la matemática pura trabaja exclusivamente con conceptos definibles, en función de un número muy pequeño de conceptos lógicos fundamentales, y que todas las proposiciones pueden deducirse de un pequeño número de principios lógicos, también fundamentales. El segundo objetivo es la explicación de los conceptos fundamentales que la matemática acepta como indefinibles y un esfuerzo para ver claramente las entidades con las que se trabaja y que la mente pueda trabar un conocimiento con ellas.

Define la matemática pura como «la clase de todas las proposiciones de la forma —*p* implica *q*— donde *p* y *q* son proposiciones que contienen una o más variables, ambas las mismas, y que no contienen más constantes que las constantes lógicas»: nociones que son definibles en función de las nociones de implicación, la noción de relación, la noción de «tal que». Además, otras que podrán incluirse en la noción general de proposiciones de la forma anterior. Y, por último, la matemática usa la noción de verdad que no forma parte de las proposiciones que considera.

En dicha obra considera cuestiones tales como número, infinito, espacio, tiempo, movimiento e incluso inferencia matemática, a las que dará una respuesta que tratará de ser demostrable con certeza matemática.

La matemática, para Bertrand Russell, afirma implicaciones formales. Es decir, en matemática pura afirmamos que si cierta aserción p es cierta para cualquier conjunto de entidades, entonces cierta otra aserción q es verdadera para esas entidades, y no afirma p y q para esas entidades separadamente; a esta relación entre las aserciones p y q es a lo que Russell llama implicación formal.

Todas las proposiciones que se refieran a lo que realmente existe, como, por ejemplo, el espacio en que vivimos, pertenecerán a una ciencia experimental o empírica, pero no a la matemática pura. Si damos a una o más variables de una proposición matemática pura algún valor constante que satisfaga unas hipótesis y que nos permita para ese valor de la variable afirmar realmente tanto la hipótesis como la consecuencia, en lugar de afirmar simplemente la implicación, nos encontraremos en la matemática aplicada.

Resalta a continuación algunos puntos importantes, como que la matemática pura se caracteriza no sólo por el hecho de afirmar implicaciones, sino por contener variables. Hace constar que este tema de las variables es uno de los más difíciles de la lógica. Resalta también que la matemática pura no debe contener más términos indefinibles que los que hemos llamado constantes lógicas.

Como ya hemos indicado, la conexión entre la matemática y la lógica es para Russell muy estrecha: el hecho de que todas las constantes matemáticas sean constantes lógicas y de que todas las premisas de la matemática se hallen relacionadas con ellas, da la formulación precisa de lo que los filósofos querían decir al asegurar que la matemática es *a priori*. El hecho es que una vez que se acepta el aparato lógico se deduce necesariamente toda la matemática.

Con estas ideas, la obra de Russell queda encaminada a probar que toda la matemática se deduce a partir de la lógica simbólica, y a descubrir cuáles son los principios de la lógica misma.

Vamos a ver ahora cómo trata Russell algunos conceptos. Russell acepta como definición de número la debida a Frege, mediante la coordinación.

Para concebir el número podemos agrupar los conjuntos en determinadas clases, de modo que cada clase sea la reunión de todos los conjuntos que tengan el mismo número de elementos. Cada una de estas clases es, pues, una clase de clases.

Ahora bien, para realizar esta clasificación de los conjuntos por su número de elementos parece evidente que tendremos necesidad de contar, operación para la cual necesitamos los números, parece entonces que hemos caído en un círculo vicioso; sin embargo, no es así: la operación de contar no la necesitamos, nos bastará para realizar esta clasificación, con la noción de coordinación. Podemos verificar de hecho si dos conjuntos tienen el mismo número de elementos independientemente de dicho número; por ejemplo, sabemos que el número de maridos es igual al de esposas (exceptuando la poligamia y la poliandria), esto se debe a la relación 1-1 que existe entre marido y esposa. Es evidente que dos conjuntos tales que entre sus elementos exista dicha relación tendrán el mismo número de elementos. Diremos entonces que dos conjuntos son coordinables cuando existe entre los elementos de ambos conjuntos una relación 1-1. La coordinación así definida goza evidentemente de la propiedades idéntica, simétrica y transitiva y, por tanto, es apta para establecer una clasificación.

Entonces vemos que dos conjuntos tendrán el mismo número de elementos si son coordinables, verificándose la proposición recíproca, y podremos, por consiguiente, emplear dicha noción de coordinación para establecer la clasificación a que antes nos referíamos. Cualquiera que sea el número de elementos de un conjunto, los coordinables con él tendrán también el mismo número. De aquí resulta la definición de número: «El número de un conjunto es la clase de todas las clases que le son coordinables.»

Esto es válido mientras se trate de números finitos. Para las clases infinitas, números transfinitos, Russell adopta la condición o definición de infinidad de Dedekind. Una clase U es infinita cuando sea semejante a la clase U′. Siendo la clase U′ la misma clase U salvo un elemento. Decimos que dos clases —U y U′ en este caso— son semejantes si se pueden poner todos sus elementos en correspondencia. O sea un conjunto es infinito cuando pueda ponerse en correspondencia con un auténtico subconjunto suyo.

Vamos ahora a ver cómo trata Russell el concepto de cero.

El cero cuantitativo tiene alguna conexión con el número 0 y con la clase vacía de la lógica; sin embargo, dice que no es definible en función de ninguno de ellos. Añade que lo que menos se comprende es la independencia de dicho concepto con lo infinitesimal.

Este concepto parece que podrá ser definido según alguna característica general, sin hacer referencia al tipo especial de cantidad a que pertenezca, pero encontrar tal definición es difícil. El cero parece distinto según que las magnitudes correspondientes sean continuas o discretas, pero no es así.

Meinong lo define como el opuesto contradictorio de cada magnitud de su tipo. Entendiendo en lógica simbólica como opuesto de una clase la que contiene todos los individuos que no pertenecen a la primera. Pero para Russell esta definición no es apropiada; cero no es sino una magnitud de su tipo y nada más que la clase de magnitudes de su tipo. Apenas podrá considerarse verdadera la igualdad entre dolor y placer cero.

También se ha definido el cero como la mínima magnitud de su tipo, pero cuando la magnitud es discreta o, siendo continua, existe lo que se ha llamado magnitud límite del tipo, esta definición es insuficiente. En todo caso, más que una verdadera definición tenemos una característica. Aparte, cuando tenemos un tipo de magnitud continuo y no existe magnitud límite, aunque estemos ante una aproximación gradual e ilimitada surge una nueva objeción: tales magnitudes son de forma que no tienen mínimo y no podremos tomar el cero como límite sin incurrir en contradicción. Con el inconveniente de ser más bien una característica, podemos decir que siempre existe una magnitud menor que otra, a menos que ésta sea cero, con esta definición evitaríamos la contradicción anterior.

Cuando nuestros tipos de magnitudes sean diferencias o distancias, el cero tiene una significación evidente: la identidad. En este caso no parece guardar relación con un tipo de distancias más que con otro pues, por ejemplo, una distancia cero en el espacio parecerá ser la misma que en el tiempo. Pero debe rechazarse esta definición, pues es evidente que el cero tiene algún significado lógico general, aun cuando no podamos establecer más que es el mismo para toda clase de cantidades y que, además, una distancia cero no es evidentemente el mismo concepto que la identidad.

En cualquier clase de magnitud continua, cero es la clase vacía. No existe en este caso una clase con un número finito de términos y, por tanto, no existe una aproximación discreta a la clase vacía. Deberemos sostener que cualquier tipo de magnitud define igualmente por su negación una magnitud especial de ese tipo que se llama cero y que es menor que todos los demás miembros.

Sin embargo, en «ningún placer» la magnitud cero no se obtiene por la negación lógica «no placer». «Ningún placer» es un concepto cuantitativo con una curiosa relación íntima con la negativa lógica, así como 0 tiene también relación con la clase vacía, la relación consiste en que no existe ninguna cantidad cuya magnitud sea cero, de forma que la clase de cantidades cero es la clase vacía. La magnitud cero de cualquier tipo es indefinible, estrictamente hablando, pero es posible de especificación por medio de su relación con el cero lógico.

Arturo Ayuso.