NOTAS ELEMENTALES

por

RAFAEL MIRANDA SERRANO

I

OBTENCION DEL TERMINO GENERAL DE LA SUCESION DE FIBONACCI

Siendo recurrente la ley de formación de la sucesión de Fibonacci, podemos aplicar el método conocido para hallar la suma y el término general de una serie recurrente.

En efecto, por definición es $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ y bastará escribir

$$\begin{array}{rl} S &= u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_n\, x^n + \ldots \\ -Sx &= \quad -u_0x - u_1x^2 - \ldots - u_{n-1}\, x^n - \ldots \\ -Sx^2 &= \qquad\quad - u_0x^2 - \ldots - u_{n-2}\, x^n - \ldots \end{array}$$

Sumando $\quad S(1 - x - x^2) = u_0 + (u_1 - u_0)x$

y como $u_0 = 0$, $u_1 = 1$

$$(1) \qquad S = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Descompuesta esta en fracciones simples, obtenemos

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}(2x + 1 - \sqrt{5})} - \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}(2x + 1 + \sqrt{5})}$$

Efectuando las divisiones de ambas fracciones, resultan por cocientes respectivos

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1 - \sqrt{5}} - \frac{2x}{(1 - \sqrt{5})^2} + \frac{4x^2}{(1 - \sqrt{5})^3} - \cdots\right] \text{ y}$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1 + \sqrt{5}} - \frac{2x}{(1 + \sqrt{5})^2} + \frac{4x^2}{1 + \sqrt{5})^3} - \cdots\right]$$

Se puede ahora expresar fácilmente la diferencia de ambos cocientes y queda

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(1-1)-\left(\frac{1}{1-\sqrt{5}}-\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)2x+\left(\frac{1}{(1-\sqrt{5})^2}-\frac{1}{(1+\sqrt{5})^2}\right)4x^2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{(1-\sqrt{5})^3}-\frac{1}{(1+\sqrt{5})^3}\right)8x^3+\ldots\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\left[o+1x+1x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+\ldots\right]$$

viéndose que el término general es

$$(2) \qquad u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{(1-\sqrt{5})^n}-\frac{1}{(1+\sqrt{5})^n}\right]\cdot 2^n$$

Con esto es fácil determinar la suma de n términos de una serie formada por los números de la sucesión de Fibonacci.

Pondremos

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_nx^n \\ -x\, S_n &= \quad -u_0x - u_1x^2 - \ldots - u_{n-1}x^n - u_nx^{n+1} \\ -x^2\, S_n &= \qquad -u_0x_2 - \ldots - u_{n-2}x^n - u_{n-1}x^{n+1} - u_n\, x^{n+2} \end{aligned}$$

y sumando

$$S(1-x-x^2)=u_1x-[u_n+u_{n-1}]\,x^{n+1}-u_nx^{n+2}$$

de donde

$$(3) \qquad S=\frac{u_1x-[u_n+u_{n-1}]\,x^{n+1}-u_nx^{n+2}}{1-x-x^2}$$

Sustituyendo los términos en (3), por sus expresiones (2), se obtiene la suma buscada.

II

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DE FOURIER

En la conocida obra de Persico, «*Introduzione alla Fisica Matematica*», al representar por una integral de Fourier la función $y(x)$, que vale b para $-a \leqslant x \leqslant +a$ y vale cero para todo x que no esté en este intervalo, resulta que aplicando la fórmula (IV, 14) de la obra citada, tenemos la expresión

$$(1) \qquad f(x)=\frac{2b}{\pi}\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,\omega a\cos\omega x}{\omega}\,d\omega$$

Para $x = 0,(1)$ da

$$f(o) = \frac{2b}{\pi} \int_{o}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega a \cdot \cos o}{\omega} d\omega = \frac{2b}{\pi} \frac{\pi}{2} = b$$

puesto que, como es sabido,

$$\int_{o}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Pero al intentar aplicarla al punto $x = \pm a$, resulta

$$f(\pm a) = \frac{2b}{\pi} \int_{o}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega a \cos \omega(\pm a)}{\omega} d\omega = \frac{2b}{2\pi} \int_{o}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\omega a}{2\omega a} 2a d\omega = \frac{b}{2}$$

que es la mitad del valor esperado.

El modo más simple a mi entender de evitar esta contradicción consiste en definir en todo punto la función de la manera siguiente:

$$f(x) = \frac{f(x + o) + f(x - o)}{2}$$

y el intervalo abierto $- a < x < + a$ es donde $f(x) = b$, cosa que no hace Persico en su libro.

III

SOBRE LA FUNCION δ (x) DE DIRAC

En la *Revista Matemática Hispano Americana*, 4.ª serie, tomo X, 1950, números 5 y 6, apareció un trabajo del señor Maravall Casesnoves, titulado «Teoría matemática rigurosa de las funciones singulares de la Mecánica quantica», en el que se da una justificación de la función δ de Dirac basada en el uso de la integral de Fourier.

No creo adecuada la justificación que el señor Maravall da en su trabajo antecitado y el objeto de esta nota es precisamente exponer donde a mi entender radica el inconveniente.

En la fórmula (17) define una función $g(z)$ por medio de una integral entre los límites más y menos infinito por la expresión

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi y \chi z} dy = g(z)$$

Pero está claro que esta integral no determina una función de z, porque efectuando la integración resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi y \gamma z}\, dy = \left[\frac{\cos 2\pi y\gamma z - i \operatorname{sen} 2\pi y\gamma z}{-2\pi i z} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\operatorname{sen} 2\pi y\gamma z}{\pi z}$$

y al sustituir y por ∞, la expresión es indeterminada, no pudiendo definir una función de z.

IV

SOBRE LA PARADOJA DE RICHARD

Es de sobra conocida la paradoja que J. Richard dió en la *Revue General des Sciences*, año 1905, sobre la teoría de los Conjuntos. Como quiera que a pesar del tiempo transcurrido no se ha dado, que yo sepa, una explicación razonable de la misma, me parece indicado tratar en esta nota precisamente de esa paradoja y de su posible explicación.

En esencia, la paradoja de Richard se reduce a formar las variaciones binarias, ternarias, etc., con repetición de las 27 letras del abecedario y colocarlas por orden alfabético, y dice Richard.

«Cualquiera que sea el entero p se encontrarán en esta colección las 27 letras tomadas p a p, y como todo lo que se puede escribir con un número finito de palabras es una variación de letras, con posibles repeticiones, todo lo que se puede escribir estará en la tabla que hemos formado.

Pero definiéndose los números por medio de palabras y estando éstas compuestas de letras, algunas de estas variaciones serán definiciones de números. Tachemos las que no lo son, y sean n_1, n_2, n_3 ... el primero, segundo, tercero ... números definidos.

Se tiene así ordenados *todos* los números definidos por medio de un número finito de palabras.»

A renglón seguido demuestra Richard que lo anterior es contradictorio, pero nosotros vamos a probar que no es contradictorio, sino más bien un sin sentido.

En efecto, entre las frases que vayan apareciendo, formadas por un número finito de letras, habrá algunas que definan números como el uno, dos, tres. y, además, otras que definan clases de números; por ejemplo, la clase de los números pares, la de los números primos, la clase de los números racionales, la de los números reales, etc. *¿Qué haremos con estas frases? ¿Podemos decir con razón que hemos ordenado todos los números definidos por medio de un número finito de palabras?* Según parece, es claro que no, y en ello radica el absurdo de la paradoja de Richard.