NOTAS DE DIVULGACIÓN

TRAYECTORIAS DE UN PUNTO MATERIAL EN EL PLANO

por

MATEO F. CHICARRO

Gastón Darboux, en sus magníficas *Leçons sur la theorie générale des Surfaces* (*), al tratar sobre las analogías entre la dinámica y la teoría de las líneas geodésicas, establece un método para la determinación de las trayectorias de un punto material libre sometido a fuerzas que derivan de una función de fuerzas, que vamos a exponer a continuación, acompañado de algunos ejemplos, por considerarlo práctico, para el estudiante medio, que con conocimiento de ecuaciones diferenciales no ha profundizado todavía en el estudio de los principios variacionales de la Mecánica.

Consideremos, pues, el movimiento en un plano de un punto material de masa $m = 1$ (para mayor comodidad), sometido a fuerzas que derivan de la función de fuerzas $U(x,y)$.

La ecuación fundamental de la Mecánica nos dará:

$$m\vec{\gamma} = \Sigma\vec{F} \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \dfrac{\delta U}{\delta x} \\[2ex] \ddot{x} = \dfrac{\delta U}{\delta y} \end{array} \right. \tag{1}$$

y por tratarse de un sistema conservativo, la integral de fuerzas vivas será:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(U + h) \tag{2}$$

Es bien sabido que bajo condiciones bastante amplias de regularidad para los segundos miembros, el sistema diferencial (1), tendrá una solución única, dando las condiciones iniciales: $t = t_0$, (x_0 , y_0) , $(\dot{x}_0 , \dot{y}_0)$. El principio de la determinación del movimiento por las condiciones iniciales, es satisfecho en general, excepto para singularidades muy banales de los segundos miembros.

(*) Segunda parte, pág. 438 y sigs. París, 1889.

Eliminando el tiempo entre las ecuaciones (1) y (2) llegaremos fácilmente a la ecuación diferencial de las trayectorias. En efecto, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dt^2} = \dfrac{\delta U}{\delta y}dx - \dfrac{\delta U}{\delta x}dy \\[2ex] dt^2 = \dfrac{(dx)^2 + (dy)^2}{2(U+h)} \end{array}\right\} dxd^2y - dy\,d^2x =$$

$$= \left[\frac{\delta U}{\delta y}dx - \frac{\delta U}{\delta x}dy\right]\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2(U+h)}$$

La ecuación diferencial así deducida, no cambiará al transcurrir el tiempo y corresponderá a un valor determinado de la constante de las fuerzas vivas h, quedando determinada cada trayectoria al dar un punto y el valor de la tangente en él.

Ahora bien, la resolución de esta ecuación diferencial es, en general, más o menos complicada, y el método que vamos a desarrollar consiste en obtener una ecuación entre derivadas parciales de primer orden, cuya integración nos facilitará la resolución del problema e incluso, en determinados casos, podrá proporcionarnos automáticamente la ecuación de la trayectoria y la ley del movimiento.

De la ecuación (2) se deduce que la velocidad del punto y, por consiguiente, las componentes de la misma $(\dot{x}, \dot{y})$ no dependen explícitamente del tiempo, toda vez que la función de fuerzas $U(x, y)$ es también independiente del tiempo; podremos entonces considerar a las componentes de la velocidad, como funciones de x e y, es decir, que

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = \dot{x}(x, y) \\[4ex] \dot{y} = \dot{y}(x, y) \end{array}\right\} \text{ y por tanto } \left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = \dfrac{\delta \dot{x}}{\delta x}\dot{x} + \dfrac{\delta \dot{x}}{\delta y}\dot{y} \\[2ex] \ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt} = \dfrac{\delta \dot{y}}{\delta x}\dot{x} + \dfrac{\delta \dot{y}}{\delta y}\dot{y} \end{array}\right.$$

Con lo que las ecuaciones (1) podrán ponerse bajo la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta \dot{x}}{\delta x}\dot{x} + \dfrac{\delta \dot{x}}{\delta y}\dot{y} = \dfrac{\delta U}{\delta x} \\[2ex] \dfrac{\delta \dot{y}}{\delta x}\dot{x} + \dfrac{\delta \dot{y}}{\delta y}\dot{y} = \dfrac{\delta U}{\delta y} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Derivemos ahora parcialmente la integral de las fuerzas vivas (2) primero respecto a x y luego respecto a y:

$$\left.\begin{aligned} \dot x \frac{\delta \dot x}{\delta x} + \dot y \frac{\delta \dot y}{\delta x} = \frac{\delta \mathrm{U}}{\delta x} \\ \dot x \frac{\delta \dot x}{\delta y} + \dot y \frac{\delta \dot y}{\delta y} = \frac{\delta \mathrm{U}}{\delta y} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

De los sistemas (3) y (4) llegamos a:

$$\dot y \left[\frac{\delta \dot x}{\delta y} - \frac{\delta \dot y}{\delta x}\right] = 0$$

$$\dot x \left[\frac{\delta \dot y}{\delta x} - \frac{\delta \dot x}{\delta y}\right] = 0$$

y puesto que $\dot x$ e $\dot y$, no tienen por qué ser idénticamente nulos, forzosamente debe ser $\frac{\delta \dot y}{\delta x} = \frac{\delta \dot x}{\delta y}$, lo que nos indica que existirá una cierta función $z = \mathrm{F}(x\,,\,y)$ tal que

$$\left.\begin{aligned} \dot x = \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta x} = p \\ \dot y = \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta y} = q \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

Sustituyamos ahora estos resultados en la integral de las fuerzas vivas, con lo que obtendremos la ecuación entre derivadas parciales a la que aludimos al principio y que va a gozar de un papel fundamental, siendo su expresión:

$$\left(\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta y}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h) \qquad (6)$$

o lo que es lo mismo

$$p^2 + q^2 - 2(\mathrm{U} + h) = \psi(p, q, x, y) = 0 \qquad (7)$$

Esta ecuación entre derivadas parciales de primer orden, es a simple vista no muy complicada, con la particularidad de no aparecer explícitamente z.

La integración de la ecuación (7) puede efectuarse por el método de Lagrange, cuya marcha a seguir es la siguiente (*):

(*) MARÍN TOYOS: *Ecuaciones diferenciales*, págs. 409 y sigs. Madrid, 1942.

1.º Se obtiene una «integral completa» de la ecuación (7) deduciendo primeramente una integral del sistema de las bandas características

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{p^2 + q^2} = -\frac{dp}{\dfrac{\delta U}{\delta x}} = \frac{-dq}{-\dfrac{\delta U}{\delta y}}$$

Sea $\psi_1 = a$ esta integral con una constante arbitraria, pero de modo que no sea nulo el determinante funcional $\dfrac{D(\psi, \psi_1)}{D(p, q)}$. Se resuelve respecto a p y q el sistema formado por las ecuaciones $\psi = 0$, $\psi_1 = a$, y las expresiones obtenidas se llevan a la ecuación

$$dz = pdx + qdy$$

La ecuación entre diferenciales totales que se obtiene es, con seguridad, completamente integrable, su integración introduce una segunda constante arbitraria y la función $z = F(x, y)$ que se obtiene, es la «integral completa» de la ecuación (7) que indudablemente podemos poner bajo la forma:

$$z = F(x, y) = \int (pdx + qdy) + b = f(x, y, a) + b \qquad (8)$$

En donde a y b son dos constantes de integración.

Veamos ahora qué relación puede existir entre las trayectorias del punto material en el plano y la función $z = F(x, y)$, que ha de ser la solución de la ecuación entre derivadas parciales (6).

Determinemos para ello la proyección sobre el plano X o Y, de las trayectorias ortogonales a la superficie $z - f(x, y, a) = b$, y tendremos:

$$\frac{dx}{-\dfrac{\delta f}{\delta x}} = \frac{dy}{-\dfrac{\delta f}{\delta y}} = \frac{dz}{1}$$

es decir,

$$pdy - qdx = 0,$$

pero de (5) determinamos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}\, dy &= pdy \\ \frac{dy}{dt}\, dx &= qdx \end{aligned}\right\} \quad \textit{es decir} \quad pdy - qdx = 0$$

que coincide con la anterior, luego vemos que «basta determinar la proyección sobre el plano x o y de las trayectorias ortogonales de $z = f(x, y, a) + b$ para obtener todas las trayectorias del punto material para un valor determinado de la constante de las fuerzas vivas h».

2.º La «integral general» se deducirá expresando una de las constantes que intervienen en la integral completa como función arbitraria de la otra y eliminando ésta, entre la integral completa y la ecuación que se obtiene tomando su derivada parcial respecto de la constante. Es decir, si $b = \varphi(a)$, eliminaremos a entre las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} z &= f(x, y, a) + \varphi(a) \\ 0 &= \frac{\delta f}{\delta a} + \dot{\varphi}(a) \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

La solución obtenida será una función $z = \theta(x, y)$ sin las constantes de integración a y b, y las trayectorias ortogonales a las curvas $\theta(x, y) = \text{Cte}$ serán las trayectorias del móvil, como en el caso anterior, obteniéndose una sola familia de trayectorias. Pero:

$$\frac{\delta f}{\delta a} + \dot{\varphi}(a) = 0$$

no son otra cosa que todas las trayectorias ortogonales. En efecto: la ecuación (6) teniendo en cuenta la primera de las (9) podemos escribirla así:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h) \qquad (10)$$

y derivándola parcialmente respecto a a, puesto que $f(x, y, a)$ la contiene, tendremos

$$\frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta a} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta a} = 0 \qquad (11)$$

que no es otra que la condición de ortogonalidad de las curvas

$$f(x, y, a) + \varphi(a) = \text{constante}$$

$$\frac{\delta f}{\delta a} + \dot{\varphi}(a) = 0$$

Por tanto, conocida la integral general $z = f(x, y, a) + \varphi(a)$ la ecuación que nos da todas las trayectorias del móvil en el plano x o y, viene dada por:

$$\frac{\delta f}{\delta a} + \dot{\varphi}(a) = 0$$

en donde daremos a la constante a todos los valores posibles.

Ahora bien, la expresión (11), teniendo en cuenta la (5) será equivalente a:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta a} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta a} \cdot \frac{dy}{d\,t} = 0$$

o bien $\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta f}{\delta a}\right) = 0$,, $\frac{\delta f}{\delta a} = a' = -\ \varphi(a)$ que nos confirma la anterior.

En fin, si derivamos parcialmente respecto a h, la expresión (10):

$$\frac{\delta f}{\delta x}\,\frac{\delta^2 f}{\delta h \delta x} + \frac{df}{\delta y}\,\frac{\delta^2 f}{\delta h \delta y} = 1\ .$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\delta^2 f}{\delta h \delta x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\delta^2 f}{\delta h \delta y}\,\frac{dy}{dx} = 1$$

de donde

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta f}{\delta h}\right) = 1$$

y de aquí

$$\frac{\delta f}{\delta h} = t - \tau$$

en donde τ designa una constante arbitraria.

3.º La «integral singular» se obtiene eliminando las dos constantes de integración entre la integral completa y las ecuaciones que se deducen derivando parcialmente respecto a las dos constantes, pero en este caso, como ya hemos indicado anteriormente, sólo obtenemos una familia de trayectorias del móvil.

En resumen, si se quiere determinar el movimiento definido por las ecuaciones

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\delta U}{\delta x} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\delta U}{\delta y}$$

se considera la ecuación entre derivadas parciales

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)^2 = 2(U + h)$$

y toda integral de esta ecuación, igualada a una constante, dará una familia de curvas cuyas trayectorias ortogonales serán las trayectorias del móvil, correspondientes a un valor determinado de la constante de las fuerzas vivas h, es decir, las que se obtendrían integrando la ecuación:

$$\boxed{\frac{\delta F}{\delta y}dx - \frac{\delta F}{\delta x}dy = 0} \tag{12-1}$$

y se determinará la ley del movimiento integrando las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\delta F}{\delta x} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\delta F}{\delta y}$$

Pero si se conoce una integral de la ecuación entre derivadas parciales que contenga una constante a bajo la forma $f(x, y, a)$ o $f(x, y, a) + \varphi(a)$ se tendrán las ecuaciones finitas de la trayectoria y del tiempo por las fórmulas

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta a} &= a' \\ \frac{\delta f}{\delta h} &= t - \tau \end{aligned}} \tag{12-2}$$

La interpretación geométrica de este método consiste en formar sistemas ortogonales, de los cuales una de las familias está compuesta por las diferentes trayectorias del móvil, correspondientes a un mismo valor de la constante, de las fuerzas vivas, y haciendo entrar en juego todas las condiciones iniciales, determinaríamos la trayectoria única del móvil para dichas condiciones.

Veamos un par de ejemplos, para aclarar los anteriores conceptos:

1.º Determinar las trayectorias de un punto material pesado de masa unidad, sometido únicamente a la acción de su peso, lanzado desde el origen de coordenadas con una velocidad inicial v_0 que forma un ángulo α con la horizontal.

La función de fuerzas será $U = - gy$, y, por consiguiente, la integral de las fuerzas vivas

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(h - gy)$$

con $h = \frac{v_0^2}{2}$, y la ecuación entre derivadas parciales (6)

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)^2 = 2(h - gy)$$

o bien

$$p^2 + q^2 = 2(h - gy) \tag{13}$$

de donde:

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{p^2 + q^2} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{g}$$

y, por lo tanto, $p = a$, será una una integral primera que teniendo en cuenta (13) nos dará

$$q = \sqrt{2(h - gy) - a^2}$$

es decir, que

$$dz = pdx + qdy = adx + \sqrt{2(h - gy) - a^2}\, dy$$

que integrada

$$z = ax + \frac{-1}{3g} \cdot [2(h - gy) - a^2]^{\frac{3}{2}}$$

con lo que la función $f(x, y, a)$ será

$$f(x, y, a) = ax - \frac{1}{3g} [2(h - gy) - a^2]^{\frac{3}{2}}$$

y finalmente, teniendo en cuenta las (12-2)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta a} &= x + \frac{a}{g}\left[2(h - gy) - a^2\right]^{\frac{1}{2}} = a' \\ \frac{\delta f}{\delta h} &= -\frac{1}{g}\left[2(h - gy) - a^2\right]^{\frac{1}{2}} = t - \tau \end{aligned}\right\} \quad (12\text{-}3)$$

La primera nos dará la ecuación de la trayectoria, y la segunda la ordenada en función del tiempo, que fácilmente pueden ponerse bajo la forma clásica.

En efecto, de (12-3)

$$g^2(x - a')^2 = a^2(2h - 2gy - a^2)$$

$$g^2(t - \tau)^2 = 2h - 2gy - a^2$$

$$g^2(x - a') = -2a^2g \frac{dy}{dx}$$

y para las condiciones iniciales

$$x = y = 0 \quad ,, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \text{tag } \alpha \quad ,, \quad 2h = v_0^2,$$

es fácil deducir:

$$a = v_0 \cos \alpha$$

$$a' = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2g}$$

$$\tau = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

que sustituídas en las (12-3) nos dan finalmente

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x tag\, \alpha$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} - (v_0 \operatorname{sen} \alpha) t$$

que coinciden con las que pueden encontrarse en cualquier tratado de Mecánica, ecuaciones que son la «única» solución para las condiciones inciales dadas, y, en cambio, las (12-3) representan «todas» las trayectorias y leyes posibles del movimiento, para un valor determinado de la constante de las fuerzas vivas h.

2.º Supongamos ahora un punto sometido a la acción de una fuerza atractiva inversamente proporcional al cubo de la distancia $f(r) = \frac{-\mu}{r^3}$, es decir, que derivará de la función de fuerzas $\frac{\mu}{2r^2}$, con lo que la integral de las fuerzas vivas podremos escribirla

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\left(\frac{\mu}{2r^2} + h\right)$$

y, por tanto, según (7)

$$p^2 + q^2 - \frac{\mu}{r^2} - 2h = 0$$

Pero para la integración de esta ecuación no existe dificultad alguna en ponerla en coordenadas polares mediante el conocido cambio

$$p = \mathrm{P} \cos \theta - \frac{\mathrm{Q}}{r} \operatorname{sen} \theta$$

$$q = \mathrm{P} \operatorname{sen} \theta + \frac{\mathrm{Q}}{r} \cos \theta$$

en donde $P = \frac{\delta z}{\delta r}$, $Q = \frac{\delta z}{\delta \theta}$, con lo que la ecuación entre derivadas parciales será:

$$P^2 r^2 + Q^2 - 2hr^2 - \mu = 0$$

y el sistema de las bandas características

$$\frac{dr}{2Pr^2} = \frac{d\theta}{2Q} = \frac{-dP}{2P^2 r - 4hr} = \frac{-dQ}{0}$$

y, por tanto,

$$\left.\begin{aligned} Q &= a \\ P &= \frac{1}{r}\sqrt{2hr^2 + (\mu - a^2)} \end{aligned}\right\} dz = Pdr + Qd\theta = (1/r)\sqrt{2hr^2 + (\mu - a^2)}dr + ad\theta$$

que deberemos integrar. Supongamos $\mu < a^2$, entonces:

$$z = a\theta + \sqrt{2hr^2 + (\mu - a^2)} - \sqrt{a^2 - \mu}\text{ arco tag }\frac{\sqrt{2hr^2 + \mu - a^2}}{\sqrt{a^2 - \mu}} + b$$

y como consecuencia de (12-2) la ecuación de la trayectoria será:

$$\frac{\delta z}{\delta a} = \theta + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \mu}}\text{ arco tag }\frac{\sqrt{2hr^2 - (a^2 - \mu)}}{\sqrt{a^2 - \mu}} = a'$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - \mu}}{a}(a' - \theta) = \text{arco tag}\sqrt{\frac{2hr^2}{a^2 - \mu} - 1}$$

$$\frac{2hr^2}{a^2 - \mu} = 1 + \text{tag}^2\left[\frac{\sqrt{a^2 - \mu}}{a}(a' - \theta)\right] = \frac{1}{\cos^2\left[\sqrt{1 - \frac{\mu}{a^2}}(a' - \theta)\right]} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{1 - \frac{\mu}{a^2}}\,\theta + \zeta\right)}$$

$$r = \sqrt{\frac{a^2 - \mu}{2h}}\;\frac{1}{\cos\left(\sqrt{1 - \mu/a^2}\,\theta + \zeta\right)}$$

o bien:

$$\boxed{\frac{1}{r} = u = \sqrt{\frac{2h}{a^2 - \mu}} \cos\left(\sqrt{1 - \mu/a^2}\ \theta + \zeta\right)}$$

y en definitiva

$$\boxed{u = \mathrm{A} \cos (\mathrm{K}\theta + \zeta)}$$

en donde A y ζ son constantes de integración iguales a $\sqrt{\dfrac{2h}{a^2 - \mu}}$ y $-\dfrac{a'}{a}\sqrt{a^2 - \mu}$, respectivamente.

Para obtener la ley del movimiento tendríamos que haber calculado $\dfrac{\delta z}{\delta h}$, como hicimos en el ejemplo anterior.

Supongamos ahora que $\mu > a^2$. Podríamos seguir el mismo procedimiento anterior, pero vamos ahora a utilizar la ecuación diferencial (12-1).
Puesto que como en el caso anterior

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Q} &= a \\ \mathrm{P} &= (1/r)\sqrt{2hr^2 + (\mu - a^2)} \end{aligned}\right\} \quad \frac{dr}{\mathrm{P}r^2} = \frac{d\theta}{\mathrm{Q}}$$

tendremos:

$$\frac{dr}{r\sqrt{2hr^2 + (\mu - a^2)}} = \frac{d\theta}{a}$$

que integrada nos dará directamente, como hemos visto, la ecuación de la trayectoria.

En efecto:

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{2hr^2 + (\mu - a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu - a^2}}\ \mathrm{L}\ \frac{\sqrt{2hr^2 + \mu - a^2} - \sqrt{\mu - a^2}}{r} =$$

$$= \frac{\mathrm{L}\sqrt{2h}}{\sqrt{\mu - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{\mu - a^2}}\ \mathrm{L}\ \frac{\sqrt{r^2 + \dfrac{\mu - a^2}{2h}} + \sqrt{\dfrac{\mu - a^2}{2h}}}{r} =$$

$$= \frac{L\,2h}{\sqrt{\mu - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{\mu - a^2}} \text{ arg cosech } \frac{r}{\sqrt{\frac{\mu - a^2}{2h}}}$$

y como consecuencia:

$$L\sqrt{2h} - \left(\frac{\theta - a'}{a}\right)\sqrt{\mu - a^2} = \text{arg cosech } \frac{r}{\sqrt{\frac{\mu - a^2}{2h}}}$$

es decir:

$$r = \sqrt{\frac{\mu - a^2}{2h}} \text{ cosech } \left[-\sqrt{\frac{\mu}{a^2} - 1}\,\theta + L\sqrt{2h} + \frac{a'}{a}\sqrt{\mu - a^2}\right]$$

y, finalmente,

$$\boxed{\frac{1}{r} = u = A \text{ senh } \left(\sqrt{\frac{\mu}{a^2} - 1}\;\theta + \varepsilon\right)} \quad \text{o bien} \quad \boxed{u = A \text{ senh } (\varkappa\theta + \varepsilon)}$$

en donde A y ε son, como antes, dos constantes de integración iguales a: $-\sqrt{\frac{2h}{\mu - a^2}}$ y $-(L\sqrt{2h} + \frac{a'}{a}\sqrt{\mu - a^2})$, respectivamente.

Por último, en el caso de $\mu = a^2$, tendremos:

$$Q = a$$

$$P = \sqrt{2h}$$

y la ecuación diferencial de las trayectorias

$$\frac{dr}{\sqrt{2h}\,r^2} = \frac{d\theta}{a}$$

que integrada nos da

$$\frac{-1}{\sqrt{2h}\,r} = \frac{\theta - a'}{a}$$

y de aquí

$$\frac{1}{r} = \frac{a'\sqrt{2h}}{a} - \frac{\sqrt{2h}}{a}\,\theta$$

de donde

$$\boxed{\frac{1}{r} = u = A\theta + \varepsilon}$$

con A y ε constantes de integración como en los casos anteriores.

Estas curvas correspondientes a los casos $\mu \gtreqless a^2$ son conocidas con el nombre de «espirales de Cotes», de las cuales la última es la «espiral recíproca», estudiadas por R. Cotes en su *Harmonia Mensurarum*, párrafos 31-98, y por Newton en *Principia*, libro I, párrafo 2, prop. IX.