SOBRE UN PROBLEMA MIXTO DE CONTORNO (*)

por

ANTONIO DE CASTRO

Los problemas mixtos de Dirichlet-Neumann para ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico han sido estudiadas por diversos métodos. Son de interesantes aplicaciones los resultados generales de M. Picone (**) que profundiza en diversas cuestiones teóricas con ellos relacionadas y muy precisos los estudios de A. Ghizzetti (***) en algunos casos particulares.

Aprovechando las ideas de uno y otro y en particular el concepto de transformadas parciales, desarrollamos en este artículo un método para el cálculo efectivo de la solución de un problema mixto que se presenta en el estudio de la difusión de gases en una cámara rectangular.

Las características generales de este tipo de problemas son:

a) Condiciones indefinidas; la función es armónica en el interior de un rectángulo (cámara de difusión).

b) Condiciones definidas; en el contorno aparecen dos tipos de datos; en una parte del mismo se dan los valores de la función, y en otra los de su derivada normal.

El problema típico viene planteado del modo siguiente. Determinar una función $u(x, y)$ que en el interior de un rectángulo R : $(o \leqslant x \leqslant a;\ o \leqslant y \leqslant 2b)$ satisfaga a la ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$, y en el contorno de R a las condiciones siguientes:

$$u(x, o) = f_0(x) \qquad u(x, 2b) = f(x)$$

Para

$$o \leqslant y \leqslant b \quad \left[\frac{\delta u(x, y)}{\delta x}\right]_0 = 0 \quad \left[\frac{\delta u(x, y)}{\delta x}\right]_a = 0$$

Para $b \leqslant y \leqslant 2b$,

$$u(o, y) = u(a, y) = g(y)$$

(*) Trabajo efectuado en el Instituto de Cálculo del Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

(**) Atti. Acc. Scienze di Torino,1940. Rendic. Sem. Mat. Fis. Milano, 1939. Véase también L. AMERIO, Rend. Ist. Lombardo, 1944-45.

(***) A. GHIZZETTI: *Rend. di Mat. Un.* Roma, 1946-47.

$g(y)$ es una función cuya variación puede tomarse constante; esto es, haremos $g(y) = my + l$ (en la mayor parte de los casos, y en primera aproximación se suele considerar $g(y) = c^{te}$.), debiendo evidentemente ser en todo caso $f(o) = g(2b) = f(a)$ para garantizar la continuidad de la solución.

El objeto de este trabajo es indicar un método numérico para calcular la función $u(x, y)$, método particularmente preciso para la porción $b \leqslant y \leqslant 2b$.

Para resolver el problema dividimos el rectángulo R en los R_1 $(o \leqslant y \leqslant 2b)$, y R_2 $(b \leqslant y \leqslant 2b)$; hallaremos las soluciones en R_1 y R_2, en función de una nueva función $\varphi(x)$; $\left(\varphi(x) = \left[\dfrac{\delta u(x, y)}{\delta y}\right]_b\right)$ de la que damos después su determinación.

2. En el recinto R_1 tenemos

$$(2\text{-}1) \qquad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

de donde se deduce multiplicando por $\cos \dfrac{n\pi x}{a}$ $(n = o, 1, 2, \ldots)$ e integrando entre o y a

$$(2.2) \qquad \int_o^a (u_{xx} + u_{yy}) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx = o \qquad (n = o, 1, 2, \ldots)$$

Si para simplificar hacemos

$$(2.3) \qquad \int_o^a u(x, y) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx = u_n(y)$$

se deduce de (2.2) mediante una integración por partes que es

$$\left[u_x \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{n\pi}{a} u \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\right]_o^a - \frac{n^2\pi^2}{a^2} \int_o^a u \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx +$$

$$+ \frac{d^2}{dy^2} \int_o^a u \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx = o$$

es decir, $u_n(y)$ debe verificar la ecuación diferencial

$$(2.4) \qquad \frac{d^2 u_n}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} u_n = o$$

con las condiciones de contorno

$$(2.5) \qquad u_n(o) = \int_o^a fo(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx = f_{on}$$

$$(2.6) \qquad u'_n(b) = \int_o^a \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{a} \, dx = \varphi_n$$

llamando f_{on} y φ_n los coeficientes de los desarrollos de $fo(x)$, $\varphi(x)$ en serie de cosenos (f_{on} conocidos, φ_n, *no*).

Consideremos separadamente los casos $n = o$, $n \neq o$.

a) Caso $n \neq o$.

En este caso de (2.4) se sigue

$$u_n(y) = A_n \operatorname{Sh} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{Ch} \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

y de aquí

$$u'_n(y) = \frac{n\pi}{a} A_n \operatorname{Ch} \frac{n\pi y}{a} - \frac{n\pi}{a} \operatorname{Sh} \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

y, por tanto, de (2.5), (2.6) sigue

$$f_{on} = u_n(o) = B_n \operatorname{Ch} \frac{n\pi b}{a} \quad ; \quad \varphi_n = u'_n(b) = \frac{n\pi}{a} A_n \operatorname{Ch} \frac{n\pi b}{a}$$

es decir, se tiene

$$u_n(y) = \frac{a}{n\pi} \frac{\varphi_n}{\operatorname{Ch} \dfrac{n\pi b}{a}} \operatorname{Sh} \frac{n\pi}{a} y + \frac{f_{on}}{\operatorname{Ch} \dfrac{n\pi b}{a}} \operatorname{Ch} \frac{n\pi}{a} (b-y)$$

b) Caso $n = o$

De (2.4) sigue

$$u_o(y) = B_o + A_o y \qquad u'_o(y) = A_o$$

y, por tanto, $u_o(y) = f_{oo} + \varphi_o y$.

Por otra parte, de (2.3) sigue

$$u(x, b) = \frac{1}{a} u_o(b) + \frac{2}{a} \sum_1^\infty u_n(b) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

y en general

$$u(x, y) = \frac{1}{a} n_o(y) + \frac{2}{a} \sum_1^\infty u_n(y) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

es decir

$$(2.7) \; u(x, y) = \frac{2}{a} \int_o^a \varphi(\xi) \left[\frac{1}{2} y + \sum_1^\infty \frac{a}{n\pi} \frac{\operatorname{Sh} \dfrac{n\pi y}{a}}{\operatorname{Ch} \dfrac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi \xi}{a} \right] d\xi +$$

$$+\frac{2}{a}\int_0^a f_0(\xi)\left[\frac{1}{2}+\sum_1^\infty \frac{Ch\frac{n\pi}{a}(b-y)}{Ch\frac{n\pi b}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\xi}{a}\right]d\xi$$

y en particular

$$(2.8)\quad u(x,b)=\frac{2}{a}\int_0^a \varphi(\xi)\left[\frac{1}{2}b+\sum_1^\infty\frac{a}{n\pi}Th\frac{n\pi b}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\xi}{a}\right]d\xi+$$

$$+\frac{2}{a}\int_0^a f_0(\xi)\left[\frac{1}{2}+\Sigma\frac{1}{Ch\frac{n\pi b}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\xi}{a}\right]d\xi$$

3. En R_2 el procedimiento a seguir es algo diverso. De la misma ecuación de Laplace se sigue que es

$$(3.1)\quad \int_0^a (u_{xx}+u_{yy})\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx=0 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Poniendo

$$(3.2)\quad \int_0^a (u-g)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx=u_n(y)$$

es

$$u(x,y)=g(y)+\frac{2}{a}\sum_1^\infty u_n(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$$

Por otra parte de la integración por partes de (3.1) sigue

$$\left[u_x\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}-\frac{n\pi}{a}u\cos\frac{n\pi x}{a}\right]_0^a-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\int_0^a u\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx+$$

$$+\frac{d^2}{dy^2}\int_0^a u\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx=0$$

es decir

$$\left|-\frac{n\pi}{a}u\cos\frac{n\pi x}{a}\right|_0^a-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\int_0^a (u-g)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx-$$

$$-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\int_0^a g\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx+\frac{d^2}{dy^2}\int_0^a (u-g)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx=0.$$

y de aquí se sigue que es

$$\frac{d^2 u_n}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} u_n = 0$$

es decir

$$u_n(y) = A_n \, Ch \frac{n\pi}{a}(y - b) + B_n \, Sh \frac{n\pi}{a}(2b - y)$$

y

$$u'_n(y) = \frac{n\pi}{a} A_n \, Sh \frac{n\pi}{a}(y - b) - \frac{n\pi}{a} B_n \, Ch \frac{n\pi}{a}(2b - y)$$

siendo

$$u_n(2b) = \int_o^a [f(x) - g(2b)] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx = F_n$$

$$u'_n(b) = \int_o^a [\varphi(x) - m] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx = \varphi_n$$

Pero por otra parte es

$$u_n(2b) = A_n \, Ch \frac{n\pi b}{a}$$

$$u'_n(b) = -\frac{n\pi}{a} B_n \, Ch \frac{n\pi b}{a}$$

de donde se deduce que es

$$A_n = \frac{F_n}{Ch \dfrac{n\pi b}{a}} \qquad\qquad B_n = -\frac{a}{n\pi} \frac{\varphi_n}{Ch \dfrac{n\pi b}{a}}$$

es decir, sustituyendo en (3.3)

$$u_n(y) = \frac{F_n}{Ch \dfrac{n\pi b}{a}} Ch \frac{n\pi}{a}(y - b) - \frac{a}{n\pi} \varphi_n \frac{Sh \dfrac{n\pi}{a}(2b - y)}{Ch \dfrac{n\pi b}{a}}$$

y en particular

$$u_n(b) = \frac{F_n}{Ch \dfrac{n\pi b}{a}} - \frac{a}{n\pi} \varphi_n \, Th \frac{n\pi b}{a}$$

sigue que es

$$u(x, b) = g(b) + \frac{2}{a}\int_0^a [f(\xi) - g(2b)] \left\{ \Sigma \frac{1}{Ch\frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi\xi}{a} \right\} d\xi +$$

$$+ \frac{2}{a}\int_0^a [\varphi(\xi) - m] \left[\Sigma \frac{-a}{n\pi} Th \frac{n\pi b}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi\xi}{a} \right] d\xi$$

y en general

$$u(x, y) = g(y) + \frac{2}{a}\int_0^a [\varphi(\xi) - m] \left\{ \Sigma \frac{-a}{n\pi} \frac{Sh\frac{n\pi}{a}(2b-y)}{Ch\frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi\xi}{a} \right\} d\xi +$$

$$+ \frac{2}{a}\int_0^a [f(\xi) - 2bm] \left\{ \sum_1^\infty \frac{Ch\frac{n\pi}{a}(y-b)}{Ch\frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi\xi}{a} \right\} d\xi$$

Por la continuidad de la solución sigue, igualando las expresiones (2.8) y (3.4), que es

$$\frac{2}{a}\int_0^a \varphi(\xi) \left\{ \frac{1}{2} b + \sum_1^\infty \frac{a}{n\pi} Th \frac{n\pi b}{a} \cos\frac{n\pi x}{a} \cos\frac{n\pi\xi}{a} \right\} d\xi +$$

$$+ \frac{2}{a}\int_0^a f_0(\xi) \left[\frac{1}{2} + \sum_n \frac{1}{Ch\frac{n\pi b}{a}} \cos\frac{n\pi x}{a} \cos\frac{n\pi\xi}{a} \right] d\xi =$$

$$= g(b) + \frac{2}{a}\int_0^a [f(\xi) - g(2b)] \left[\sum_n \frac{1}{Ch\frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi\xi}{a} \right] d\xi +$$

$$+ \frac{2}{a}\int_0^a [\varphi(\xi) - m] \left[\sum_n \frac{-a}{n\pi} Th \frac{n\pi b}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi\xi}{a} \right] d\xi.$$

El problema queda reducido a esta ecuación integral de Riesz.

Para el cálculo numérico, poniendo $\varphi(\xi) = \sum_0^\infty a_m \cos\frac{m\pi\xi}{a}$ teniendo en cuenta que es

$$\int_o^a \varphi(\xi)\, d\xi = a_0 a.$$

$$\int_o^a \varphi(\xi) \operatorname{sen} \frac{n\pi\xi}{a}\, d\xi = \frac{a}{\pi} \Sigma' \frac{a_m}{m} \frac{2n}{n^2 - m^2} \qquad (n,\ m \text{ distinta paridad}).$$

$$\int_o^a \varphi(\xi) \cos \frac{n\pi\xi}{a}\, d\xi = \frac{a}{2} a_n.$$

queda

$$a_0 b + \frac{a}{\pi} \sum_1^\infty \frac{a_n}{n} Th \frac{n\pi b}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \Sigma A_n \cos \frac{n\pi x}{a} =$$

$$= g(b) + \Sigma B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} - \frac{4a}{\pi^2} \Sigma a_n Th \frac{n\pi b}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \sum_m{}' \frac{1}{n^2 - m^2}$$

designando para abreviar

$$A_n = \frac{2}{a} \int_o^a f_0(\xi) \frac{1}{Ch \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi\xi}{a}\, d\xi ,$$

$$B_n = \frac{2}{a Ch \frac{n\pi b}{a}} \int_o^a [f(\xi) - g(2b)] \operatorname{sen} \frac{n\pi\xi}{a}\, d\xi$$

Multiplicando por sen $\frac{k\pi x}{a}$ e integrando entre o y a se obtiene

$$[a_0 b - g(2b)] \frac{2a}{k'\pi} + \frac{2a^2}{\pi^2} \Sigma' \frac{a_n}{n} Th \frac{n\pi b}{a} \frac{k}{k^2 - n^2} + \frac{a}{\pi} \Sigma' A_n \frac{k}{k^2 - n^2} =$$

$$= \frac{a}{2} B_k - \frac{2a^2}{\pi^2} a_k Th \frac{k\pi b}{a} \sum_m{}' \frac{1}{k^2 - m^2}$$

(k' valores impares)

sistema este de ecuaciones lineales de teoría conocida. Aplicado al caso particular $f_0 \equiv 0$ $\quad f(x) = g(y) = c^{te}$ demostró una convergencia lo suficientemente rápida para poder ser utilizado con ventaja en el cálculo de $u(x,\ y)$ en especial en R_2.