EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **18**, Núm. 3, 289 – 295 (2003)

Caractérisations des b-Espaces Libres

Belmesnaoui Aqzzouz

Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique, Equipe d'Analyse Fonctionnelle, B.P. 133 *Kénitra, Maroc*
e-mail: baqzzouz@hotmail.com

(Presented by Jesús M.F. Castillo)

AMS *Subject Class.* (2000): 46M05, 46M15, 46M40 *Received December* 5, 2002

1. Introduction et notations

Les espaces de Banach libres et les b-espaces libres ont été utilisés par L. Waelbroeck dans la construction de ces catégories abéliennes [4] et [5]. Le but principal de ce papier est d'étudié quelques propriétés de cette classe d'espaces et d'établir les liens entre cette classe et le théorème de Bartle-Graves dans le cadre des b-espaces de Waelbroeck [3] qui est une classe plus générale que celle des espaces bornologiques (localement convexes) de Bourbaki [2]. Rappelons que le théorème de Bartle-Graves [1] dit que toute surjection linéaire bornée entre des espaces de Banach admet un inverse à droite continu (non nécessairement linéaire) borné sur les bornés.

Nous montrerons que si X est un ensemble et $u\colon E \to F$ une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces, alors l'application linéaire bornée $\beta\,(X,u) : \beta\,(X,E) \to \beta\,(X,F)\,,\ f \longmapsto u \circ f$ est bornologiquement surjective, et nous établirons que pour tout ensemble X et pour tout espace de Banach E, l'espace de Banach $\mathbf{Ban}\,(l_1(X),E)$ est isomorphe à $\beta\,(X,E)$. Après, nous montrerons qu'un b-espace G est libre si, et seulement si, l'application linéaire bornée $\mathbf{b}(G,u)\colon \mathbf{b}(G,E) \to \mathbf{b}(G,F)$, $f \longmapsto u \circ f$ est bornologiquement surjective dès que $u\colon E \to F$ est une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces. Ensuite, si E est un b-espace, nous établirons qu'il existe un ensemble I tel que pour tout $i \in I$, il existe un ensemble X_i et une application linéaire bornée et bornologiquement surjective $u\colon \oplus_{i\in I}\, l_1(X_i) \to E$. Enfin, si E est un b-espace libre et F_1, F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$ (en tant que b-espaces), nous montrerons que l'application linéaire bornée

$\mathbf{b}(G,u)\colon \mathbf{b}(G,H_1) \to \mathbf{b}(G,H_2)$, $f \longmapsto u \circ f$ est bornologiquement surjective dès que $u\colon H_1 \to H_2$ est une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces, où $G = F_1, F_2$.

Nous terminons ce paragraphe en fixant les notations dont nous aurons besoin tout au long de ce papier. On désigne par **Ban** la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires bornées. Si E_1 et E_2 sont deux espaces de Banach, on désigne par $\mathbf{Ban}(E_1, E_2)$ l'espace de Banach de toutes les applications linéaires bornées $E_1 \to E_2$.

Soit E un espace vectoriel. Si B est un disque (i.e. un ensemble convexe équilibré) de E, on note E_B l'espace vectoriel engendré par B muni de la semi-norme $\|x\|_B = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ \colon x \in \alpha B\}$. Le disque B est dit complétant si $(E_B, \| \ \|_B)$ est un espace de Banach.

On appelle bornologie de b-espace sur E, toute famille β de parties de E vérifiant les axiomes suivants:

(1) toute partie finie de E appartient à β.

(2) si $A \in \beta$ et $B \subset A$, alors $B \in \beta$.

(3) β est stable pour la réunion finie.

(4) l'homothétique de tout élément de β est un élément de β.

(5) si $A \in \beta$, alors il existe un disque borné complétant B de β tel que $A \subset B$.

Le couple (E, β) est appelé un b-espace. Un sous-espace vectoriel F d'un b-espace E est bornologiquement fermé, si pour tout borné complétant B de E, le sous-espace vectoriel $F \cap E_B$ est fermé dans l'espace de Banach E_B.

Sur tout espace vectoriel topologique localement convexe E, l'ensemble des parties absorbées par tout voisinage de 0 forme une bornologie appelée la bornologie de von Neumann, E muni de cette bornologie sera noté E_b. Si dans E tout disque borné fermé est complétant, alors E_b est un b-espace.

Si (E_1, β_1) et (E_2, β_2) sont deux b-espaces, une application linéaire $u\colon E_1 \to E_2$ est dite bornée si pour tout $A \in \beta_1$ on a $u(A) \in \beta_2$; u est dite bornologiquement surjective si pour tout $B \in \beta_2$, il existe $A \in \beta_1$ tel que $u(A) \supseteq B$. Si E_1 et E_2 sont deux b-espaces, on désigne par $\mathbf{b}(E_1, E_2)$ l'espace de toutes les applications linéaires bornées $E_1 \to E_2$ muni de la bornologie de b-espace suivante: une partie B de $\mathbf{b}(E_1, E_2)$ est dite bornée si l'ensemble $\{u(x) : u \in B,\ x \in B'\}$ est un borné de E_2, quelque soit la partie bornée B' de E_1. On désigne aussi par **b**, la catégorie des b-espaces et des applications linéaires bornées. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour plus de détails à ce sujet.

2. Résultats

Si X est un ensemble et E un b-espace, on note par $\beta(X, E)$ l'espace des applications $f: X \to E$ telle que $f(X)$ est borné dans E. Cet espace sera muni de la bornologie équibornée i.e., une partie B de $\beta(X, E)$ est bornée si l'ensemble $\{f(x): f \in B,\ x \in X\}$ est borné dans E.

Proposition 2.1. *Si X est un ensemble et $u: E \to F$ une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces, alors l'application linéaire bornée $\beta(X, u) : \beta(X, E) \to \beta(X, F)\,,\ f \longmapsto u \circ f$ est bornologiquement surjective*

Preuve. Soit A un borné de $\beta(X, F)$. L'ensemble $D = \{f(x): f \in A,\ x \in X\}$ est borné dans F. Comme l'application $u: E \to F$ est bornologiquement surjective, il existe un borné C de E tel que $u(C) = D$. Par l'axiome du choix, il existe une application $v: D \to C$ tel que $u \circ v = 1_D$, où 1_D est l'application identité de D. Posons $B = \{g = v \circ f: f \in A\}$, alors B est un borné de $\beta(X, E)$ et $A = u \circ B = \{u \circ g: g \in B\}$. Par suite, l'application $\beta(X, u)$ est bornologiquement surjective. ∎

On déduit alors,

Corollaire 2.2. *Soient X un ensemble, E un b-espace et F un sous-espace vectoriel bornologiquement fermé de E, alors $\beta(X, E/F) = \beta(X, E)/\beta(X, F)$.*

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de b-espaces. Sur le produit direct $\prod_{i\in I} E_i$, on définit la bornologie suivante: une partie B de $\prod_{i\in I} E_i$ est bornée si pour tout $i \in I$, l'ensemble $p_i(B) = \{p_i(x): x \in B\}$ est borné dans E_i, où $p_j: \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow E_j$ est la projection canonique.

Il est clair que les projections canoniques $p_j: \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow E_j$ sont bornées lorsque nous munissons $\prod_{i\in I} E_i$ de la bornologie ci-dessus.

Le produit direct d'une famille de b-espaces $(E_i)_{i\in I}$ est un b-espace. Mais le coproduit d'une famille de b-espaces n'est pas un b-espace.

On définit aussi la somme directe de b-espaces. Soit I un ensemble et pour tout $i \in I$, soit E_i un b-espace. Alors $(x_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} E_i$ si $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ et s'il existe un ensemble fini I_0 de I tel que $x_i = 0$ pour tout $i \notin I_0$. Une partie B de $\oplus_{i\in I} E_i$ est bornée si elle est bornée dans $\prod_{i\in I} E_i$ et s'il existe une partie finie I_0 de I tels que pour tout $i \notin I_0$, $p_i(B) = \{0\}$. Le b-espace $\oplus_{i\in I} E_i$ est la somme directe de la famille des b-espaces $(E_i)_i$.

Il est clair que le produit direct $\prod_{i\in I} C_i$ de bornés complétants est un borné complétant. Même chose pour $\oplus_{i\in I} C_i$.

Un espace de Banach E est libre si E est isomorphe à $l_1(X)$ pour un certain ensemble X. Un b-espace G est libre s'il existe un ensemble I, tel que pour tout $i \in I$, il existe un ensemble X_i : G est isomorphe (bornologiquement) au b-espace $\oplus_{i\in I} l_1(X_i)$.

Proposition 2.3. *Pour tout espace de Banach E et pour tout ensemble X, l'espace de Banach $\mathbf{Ban}\,(l_1(X), E)$ est isomorphe à $\beta\,(X, E)$.*

Preuve. Considérons le plongement de X dans $l_1(X)$ définit comme suit: pour tout $x \in X$, on a une application

$$i_x \colon X \to C, \qquad y \longmapsto i_x(y)$$

telle que $i_x(y) = 1$ si $x = y$ et $i_x(y) = 0$ si $x \neq y$.

Soit l'application linéaire bornée $u \colon l_1(X) \to E$ définit par ces restrictions à l'ensemble $\{i_x \colon x \in X\}$. Un élément λ de $l_1(X)$ est la série absolument convergente $\sum_{x\in X} \lambda(x) u(i_x)$. On a alors

$$u(\lambda) = \textstyle\sum_{x\in X} \lambda(x) u(i_x).$$

Soit $u_1 \colon X \to E$ l'application définit par $u_1(x) = u(i_x)$. Il est clair que l'application linéaire bornée $\mathbf{Ban}\,(l_1(X), E) \to \beta\,(X, E)$, $u \mapsto u_1$ est un isomorphisme. ∎

Comme conséquence, nous obtenons le résultat suivant:

Corollaire 2.4. *Soient X un ensemble, E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E, alors*

$$\mathbf{Ban}\,(l_1(X), E/F) = \mathbf{Ban}\,(l_1(X), E) / \mathbf{Ban}\,(l_1(X), F).$$

Les b-espaces libres nous permettent d'avoir une version du théorème de Bartle-Graves pour les applications linéaires bornées.

Proposition 2.5. *Si G est un b-espace libre alors, l'application linéaire bornée $\mathbf{b}(G, u) \colon \mathbf{b}(G, E) \to \mathbf{b}(G, F)$, $f \longmapsto u \circ f$ est bornologiquement surjective dès que $u \colon E \to F$ est une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces.*

Preuve. Comme l'application $u\colon G \to F$ est bornologiquement surjective, pour tout disque borné complétant C de F, il existe un disque borné complétant B de E tel que $u(B) = A$. Par hypothèse $G = \oplus_{i\in I} l_1(X_i)$, et donc l'application u est déterminée par ces restrictions aux b-espaces intervenant dans la somme directe bornologique. Appelons $u_i\colon l_1(X_i) \to E$ la restriction de u à $l_1(X_i)$. Si $C^{'}$ est un borné dans le b-espace $\mathbf{b}(\oplus_{i\in I} l_1(X_i), F)$, on pose

$$C_i^{'} = \{u_i\colon u \in C^{'}\}$$

C'est un borné de $\mathbf{b}(l_1(X_i), F)$, et donc un borné d'un certain $\mathbf{b}(l_1(X_i), F_{C_i})$, où C_i est borné complétant de F. Comme l'espace $l_1(X_i)$ est libre dans la catégorie **Ban**, alors pour tout borné $C_i^{'}$ dans $\mathbf{b}(l_1(X_i), F_{C_i})$, il existe un borné $B_i^{'}$ dans $\mathbf{b}(l_1(X_i), E_{B_i})$ tel que $u(B_i^{'}) = C_i^{'}$. Notons que la partie $B_i^{'}$ est aussi bornée dans $\mathbf{b}(l_1(X_i), E)$. Il s'ensuit que l'ensemble borné $\oplus_{i\in I} B_i^{'}$ relève le borné $\oplus_{i\in I} C_i^{'}$, et vu que $C^{'} \subset \oplus_{i\in I} C_i^{'}$, alors $C^{'}$ peut être relevé en une partie de $\oplus_{i\in I} B_i^{'}$. ∎

Comme conséquence du résultat ci-dessus nous obtenons la caractérisation suivante:

Corollaire 2.6. *Soient G un b-espace libre, E un b-espace et F un sous-espace vectoriel bornologiquement fermé de E, alors $\mathbf{b}(G, E/F) = \mathbf{b}(G, E)/\mathbf{b}(G, F)$.*

Si E est un espace de Banach, nous savons qu'il existe un ensemble X et une application linéaire bornée surjective $u\colon l_1(X) \to E$. Dans le cas bornologique nous obtenons un résultat de même nature. En effet:

Proposition 2.7. *Soit E un b-espace, alors il existe un ensemble I tel que pour tout $i \in I$, il existe un ensemble X_i et une application linéaire bornée et bornologiquement surjective $u\colon \oplus_{i\in I} l_1(X_i) \to E$.*

Preuve. Soit E un b-espace et soit $(B_i)_{i\in I}$ une base de la bornologie de E. On peut supposer les bornés B_i complétants. Pour tout $i \in I$, on choisit un ensemble X_i, contenu et dense dans B_i (la boule unité fermée de l'espace de Banach E_{B_i}). Or on sait que pour tout $i \in I$, il existe une application linéaire bornée et surjective $u_i\colon l_1(X_i) \to E$. La famille de ses applications u_i définissent une application linéaire bornée et bornologiquement surjective $u\colon \oplus_{i\in I} l_1(X_i) \to E$. ∎

Proposition 2.8. *Soient E un b-espace libre et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$ (bornologiquement). Alors, l'application linéaire bornée $\mathbf{b}(G,u)\colon \mathbf{b}(G,H_1) \to \mathbf{b}(G,H_2)$, $f \longmapsto u \circ f$ est bornologiquement surjective dès que $u\colon H_1 \to H_2$ est une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces, où $G = F_1$, F_2.*

Preuve. Supposons que E est un b-espace libre tel que $E = F_1 \oplus F_2$ (bornologiquement). Soit $u\colon H_1 \to H_2$ une application linéaire bornée et bornologiquement surjective. Nous remarquons que

$$\mathbf{b}(E,H_1) = \mathbf{b}(F_1,H_1) \times \mathbf{b}(F_2,H_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}(E,H_2) = \mathbf{b}(F_1,H_2) \times \mathbf{b}(F_2,H_2).$$

Comme l'application $\mathbf{b}(G,u)\colon \mathbf{b}(G,H_1) \to \mathbf{b}(G,H_2)$, $f \longmapsto u \circ f$ est bornologiquement surjective, les deux projections $\mathbf{b}(F_1,u)\colon \mathbf{b}(F_1,H_1) \to \mathbf{b}(F_1,H_2)$, $f \longmapsto u \circ f$ et $\mathbf{b}(F_2,u)\colon \mathbf{b}(F_2,H_1) \to \mathbf{b}(F_2,H_2)$, $f \longmapsto u \circ f$ sont bornologiquement surjectives. ∎

Corollaire 2.9. *Si G est un b-espace libre et G_1 un sous-espaces vectoriel de G qui admet un complémentaire bornologique. Si E est un b-espace et F un sous-espace vectoriel bornologiquement fermé de E, alors $\mathbf{b}(G_1,E/F) = \mathbf{b}(G_1,E)/\mathbf{b}(G_1,F)$.*

Enfin, nous donnons la réciproque de la proposition 2.5.

Proposition 2.10. *Soit E un b-espace tel que l'application linéaire bornée $\mathbf{b}(E,u)\colon \mathbf{b}(E,H_1) \to \mathbf{b}(E,H_2)$, $f \longmapsto u \circ f$ est bornologiquement surjective dès que $u\colon H_1 \to H_2$ est une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces, alors E est libre.*

Preuve. Si E est un b-espace, d'après la proposition 2.7, pour tout $i \in I$, il existe un ensemble X_i et une application linéaire bornée $u\colon \oplus_{i\in I} l_1(X_i) \to E$ qui est bornologiquement surjective. Par hypothèse, l'application linéaire bornée $\mathbf{b}(E,u)$ prend ces valeurs dans l'espace $\mathbf{b}(E,E)$ et de plus elle est surjective. Dans le b-espace $\mathbf{b}(E,E)$ on trouve l'élément Id_E, donc il existe une application linéaire bornée $v\colon E \to \oplus_{i\in I} l_1(X_i)$ telle que $\mathrm{Id}_E = u \circ v$. Ceci montre que le b-espace E est isomorphe à une somme directe bornologique d'espaces de Banach libres. ∎

Références

[1] Aqzzouz, B., Généralisations du théorème de Bartle-Graves, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **333, 10** (2001), 925 – 930.

[2] Bourbaki, N., "Espaces Vectoriels Topologique. Chapitre 1 à 5", Masson, París, 1981.

[3] Waelbroeck, L., "Topological Vector Spaces and Algebras", Lectures Notes in Math. 230, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[4] Waelbroeck, L., Quotient Banach spaces, in "Spectral Theory", Banach Center Publ. 8, (1982), 553 – 562.

[5] Waelbroeck, L., The category of quotient bornological spaces, in "Aspects of Mathematics and its Applications", J.A. Barosso (ed.), Elsevier Sciences Publishers B.V., 1986, 873 – 894.