EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **18**, Núm. 1, 57 – 64 (2003)

Sur les Transformations Additives qui Conservent le Spectre de Surjection

Mustapha Ech-Cherif El Kettani, El Houcine El Bouchibti

Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences Dhar-Mahraz, B.P 1796 *Atlas Fès, Maroc*

e-mail: melkettani@caramail.com, elbouchibti@hotmail.com

(Presented by M. González)

AMS *Subject Class.* (2000): 46J99, 30D05, 47B49 *Received June* 13, 2001

Introduction

Soient X un espace de Banach de dimension infinie sur le corps des nombres complexes, et $B(X)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur X. On appelle spectre de surjection d'un opérateur $T \in B(X)$ l'ensemble $\sigma_s(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (T-\lambda)(X) \neq X\}$ qui est une partie non vide du spectre de T. D'après [17, Lemme 1], le spectre de surjection coïncide avec le spectre de T dans le cas où T est un opérateur ayant un spectre fini, pour plus d'informations à propos de $\sigma_s(T)$ voir [6] et [17]. Beaucoup de gens se sont intéressés aux transformations qui conservent certains ensembles dans les algèbres des opérateurs bornés sur un espace de Banach de dimension infinie, on pourra voir par exemple [1], [2], [4], [6] – [15]. A. Jafarian et A.R. Sourour ont montré dans [1] que si X et Y sont des espaces de Banach de dimensions infinies et Φ est une transformation de $B(X)$ sur $B(Y)$ qui est linéaire surjective et conserve le spectre, alors ou bien $\Phi(T) = ATA^{-1}$, ou bien $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$, où $A : X \to Y$ et $B : X' \to Y$ sont des applications linéaires bijectives bornées. M. Omladič et P. Šemrl ont montré dans [11] qu'on obtient le même résultat avec les mêmes hypothèses en supposant que Φ est seulement additive. Puis dans [6] P. Šemrl a montré que si Φ est une transformation de $B(X)$ sur $B(X)$ qui est linéaire et conserve le spectre ponctuel, alors $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$, où $A : X \to X$ est un isomorphisme linéaire borné. Nous avons montré dans [8] qu'on obtient le même résultat avec les mêmes hypothèses en supposant que Φ est seulement additive. Dans [6] P. Šemrl a aussi montré par des méthodes algébriques que si X est un espace de Hilbert de dimension infinie et Φ est une transformation de $B(X)$ sur $B(X)$ qui est linéaire et conserve le spectre de surjection, alors $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$, où $A : X \to X$ est un isomorphisme linéaire borné. Dans ce présent travail nous nous proposons de montrer que le résultat reste valable avec les mêmes hypothèses en supposant que Φ est seulement additive. En utilisant la notion de trace des opérateurs de rang fini nous allons montrer que les conditions de surjectivité, additivité et préservation du spectre de surjection entraînent les hypothèses du théorème principal de M. omladič et P. Šemrl dans [12]. De plus ces conditions vont nous permettre d'éliminer trois des quatre éventualités prouvées par le théorème de M. omladič et P. Šemrl. Par suite, nous allons déduire qu'une telle transformation est de la forme $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

Dans toute la suite nous désignons par $\sigma(T)$ le spectre de l'opérateur T et par $\rho(T)$ son rayon spectral. Soient $x,y \in X$ et $f \in X'$, $x \otimes f$ désigne l'opérateur défini par $x \otimes f(y) = f(y)x$. Signalons que tout opérateur de rang 1 s'écrit sous cette forme avec x et f tous les deux non nuls, de plus cet opérateur est idempotent de rang 1 si et seulement si $f(x) = 1$ voir [6] et [11]. Signalons aussi que $\sigma_s(x \otimes f) = \sigma(x \otimes f) = \{0; f(x)\}$. Nous notons par $F_n(X)$ l'ensemble des opérateurs de rang n dans $B(X)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et par $F(X)$ l'idéal des opérateurs de rang fini qui est aussi appelé socle de $B(X)$ noté $\mathrm{Soc}(B(X))$ et qui est linéairement engendré par les opérateurs idempotents de rang 1 voir [5]. $\mathrm{AnnSoc}(B(X))$ désigne l'annulateur du socle de $B(X)$, c'est l'ensemble des opérateurs $T \in B(X)$ vérifiant $TR = 0$ pour tout $R \in \mathrm{Soc}(B(X))$.

1. Présentation des résultats

Les résultats que nous allons démontrer sont les suivants :

Théorème 1.1. *Soient X un espace de Banach complexe de dimension infinie et $\Phi : B(X) \to B(X)$ une transformation additive surjective qui conserve le spectre de surjection. Alors ou bien*

- i) *il existe une transformation linéaire bijective bornée $A : X \to X$ telle que $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in F(X)$, ou bien*
- ii) *il existe une transformation linéaire bijective bornée $B : X' \to X$ telle que $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in F(X)$.*

Théorème 1.2. *Soient X un espace de Hilbert de dimension infinie, et $\Phi : B(X) \to B(X)$ une transformation additive surjective qui conserve le spectre de surjection. Alors il existe un isomorphisme linéaire borné $A : X \to X$ tel que $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$.*

Pour démontrer ces résultats nous allons utiliser la notion de trace. Dans [5] B. Aupetit a défini la trace d'un opérateur T de rang fini qui généralise la notion de trace classique relative aux matrices par :

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda m(\lambda, T),$$

où par définition si $\lambda \in \sigma(T)$ la multiplicité de λ notée $m(\lambda, T)$ est le rang de la projection de Riesz $P(\lambda, T)$ associée à λ définie par :

$$P(\lambda, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - T)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est un contour simple qui isole λ du reste du spectre de T. Signalons que cette multiplicité coïncide avec la multiplicité des valeurs propres dans le cas des matrices.

Les propriétés de la trace que nous allons utiliser sont les suivantes (voir [5]) :

i) $\mathrm{Tr}(S + T) = \mathrm{Tr}(S) + \mathrm{Tr}(T)$, pour tout S, $T \in F(X)$.
ii) $\sigma(R) = \{0, \mathrm{Tr}(R)\}$, pour tout $R \in F_1(X)$.
iii) $\mathrm{Tr}(\alpha T) = \alpha\, \mathrm{Tr}(T)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tout $T \in F(X)$.
iv) La fonction $T \to \mathrm{Tr}(T)$ est continue sur $F_n(X)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
v) Soit f une fonction holomorphe d'un domaine D de $\mathbb{C}$ vers $F(X)$. Alors la fonction $\lambda \to \mathrm{Tr}(f(\lambda))$ est holomorphe sur D.

Le lemme suivant est une version simple d'un résultat de B. Aupetit au cas de $B(X)$, voir [5, Corollaire 3.6].

Lemme 1.1. *Soit $S \in B(X)$. Supposons que* $\mathrm{Tr}(ST) = 0$ *pour tout $T \in F(X)$. Alors $S = 0$.*

Le lemme suivant est dû à P. Šemrl [6].

Lemme 1.2. [6, Lemme 2] *Soient $B, C \in B(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Supposons que C est un opérateur de rang fini, $\lambda \notin \sigma(B)$ et $\lambda \in \sigma(B+C)$. Alors $\lambda \in \sigma_s(B+C)$.*

Lemme 1.3. *Soit $A \in B(X)$. Nous avons $\sigma_s(T + A) \subset \sigma_s(T)$ pour tout $T \in B(X)$ si et seulement si $A = 0$.*

Démonstration. Si $A = 0$, il est évident que $\sigma_s(T + A) \subset \sigma_s(T)$ pour tout $T \in B(X)$. Pour l'implication réciproque, supposons que $A \neq 0$ alors il existe $x \in X$ non nul tel que $Ax = y \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha \notin \sigma(A)$ et choisissons $f \in X'$ tel que $f(x) = 1$ et $f(y) \neq 0$. Pour $T = (\alpha x - y) \otimes f$, nous avons $\alpha \in \sigma(T + A)$ et $\alpha \notin \sigma(A)$. D'après le lemme 1.2 nous avons $\alpha \in \sigma_s(T + A)$ mais $\sigma_s(T) = \{0; \alpha - f(y)\}$. D'où le résultat. ∎

Lemme 1.4. *Soit $\Phi : B(X) \to B(X)$ une transformation additive surjective qui conserve le spectre de surjection. Alors Φ est injective.*

Démonstration. Soit $A \in B(X)$ tel que $\Phi(A) = 0$. Alors $\sigma_s(\Phi(A)+\Phi(T)) \subset \sigma_s(\Phi(T))$ pour tout $T \in B(X)$. Comme Φ conserve le spectre de surjection nous avons $\sigma_s(A + T) \subset \sigma_s(T)$ pour tout $T \in B(X)$, et le lemme 1.3 entraîne que $A = 0$. Donc Φ est injective. ∎

Lemme 1.5. *Soient $\Phi : B(X) \to B(X)$ une transformation additive surjective qui conserve le spectre de surjection et $R \in B(X)$. Alors $\Phi(R)$ est un opérateur idempotent de rang 1 si et seulement si R est un opérateur idempotent de rang 1.*

Démonstration. P. Šemrl a montré dans [6, pp. 147–148] que si $\Phi : B(X) \to B(X)$ est une transformation surjective qui est linéaire et conserve le spectre de surjection, alors Φ conserve les opérateurs idempotents de rang 1 dans les deux sens. En fait dans sa démonstration il n'a utilisé que l'additivité de Φ, d'où le résultat. ∎

Lemme 1.6. *Soit $\Phi : B(X) \to B(X)$ une transformation additive surjective qui conserve le spectre de surjection. Alors pour tout opérateur idempotent R de rang 1 dans $B(X)$ et pour tout $T \in B(X)$ ayant un spectre fini, nous avons*

$$\mathrm{Tr}[\Phi(R)\Phi(T)] = \mathrm{Tr}(RT).$$

Démonstration. Fixons $T \in B(X)$ ayant un spectre fini et R un opérateur idempotent de rang 1. Nous avons $\rho(T + rR) = |r|\rho(\frac{T}{r} + R)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$ et d'après les propriétés sous-harmoniques du rayon spectral (voir [3]) nous avons $\rho(T + rR)$ tend vers $+\infty$ lorsque $|r|$ tend vers $+\infty$, car $\rho(\frac{T}{r} + R)$ tend vers $\rho(R)$ lorsque $|r|$ tend vers $+\infty$ et $\rho(R) \neq 0$. Donc il existe $\alpha > \rho(T)$ tel que, $|r| > \alpha$ implique $\rho(T + rR) > \rho(T)$, ce qui montre que pour $|r| > \alpha$, $\sigma(T + rR)$ rencontre la composante connexe non bornée U de $\mathbb{C} - \sigma(T)$.

D'après [5] la trace d'un opérateur de rang 1 est égale à l'élément non nul dans son spectre s'il existe et à 0 dans le cas contraire. Ainsi nous obtenons l'équivalence suivante : $\lambda \in \sigma(T + rR) \cap U$ si et seulement si $\lambda \in U$ et $\frac{1}{r} = \mathrm{Tr}[(\lambda - T)^{-1}R]$ car $(\lambda - T)^{-1}R$ est un opérateur de rang 1 . D'après le lemme 1.2 nous avons $\lambda \in \sigma(T + rR) \cap U$ si et seulement si $\lambda \in \sigma_s(T + rR) \cap U$. Comme Φ est $\mathbb{Q}$-linéaire et conserve le spectre de surjection nous déduisons que $\lambda \in \sigma(T + rR) \cap U$ si et seulement si $\lambda \in \sigma(\Phi(T) + r\Phi(R)) \cap U$. Ce qui est équivalent à dire que $\lambda \in U$ et $\frac{1}{r} = \mathrm{Tr}[(\lambda - \Phi(T))^{-1}\Phi(R)]$ puisque $\Phi(R)$ est un opérateur idempotent de rang 1. D'après [5, Théorème 3.1] les deux fonctions $h(\lambda) = \mathrm{Tr}[(\lambda - T)^{-1}R]$ et $k(\lambda) = \mathrm{Tr}[(\lambda - \Phi(T))^{-1}\Phi(R)]$ sont holomorphes sur U, de plus elles coïncident sur l'ensemble $E = \cup_{\{r\in\mathbb{Q}^*:\,|r|>\alpha\}}\{\lambda \in U, h(\lambda) = \frac{1}{r}\}$. Dans [5, p. 66] B. Aupetit a montré que E n'est pas discret dans U ce qui prouve, d'après le principe d'identité, que h et k coïncident sur U. Pour $|\lambda| > \rho(T) = \rho(\Phi(T))$, développons en séries les fonctions h et k nous obtenons

$$\mathrm{Tr}(\frac{\Phi(R)}{\lambda} + \frac{\Phi(R)\Phi(T)}{\lambda^2} + \cdots) = \mathrm{Tr}(\frac{R}{\lambda} + \frac{RT}{\lambda^2} + \cdots).$$

En utilisant les propriétés de la trace qu'on a cité précédemment et le fait que $\mathrm{Tr}(\Phi(R)) = \mathrm{Tr}(R)$ et en comparant les coefficients nous déduisons que $\mathrm{Tr}[\Phi(R)\Phi(T)] = \mathrm{Tr}(RT)$. ∎

Lemme 1.7. *Soit $\Phi : B(X) \to B(X)$ une transformation additive surjective qui conserve le spectre de surjection. Alors Φ est 1-homogène sur $F(X)$. (i.e., $\Phi(\lambda T) = \lambda\Phi(T)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $T \in F(X)$).*

Démonstration. Fixons $T \in F(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit R un opérateur idempotent de rang 1 dans $B(X)$. Nous avons d'après le lemme 1.6 et les propriétés de la trace :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[(\Phi(\lambda T) - \lambda\Phi(T))\Phi(R)] &= \mathrm{Tr}[\Phi(\lambda T)\Phi(R)] - \mathrm{Tr}[\lambda\Phi(T)\Phi(R)] \\
&= \mathrm{Tr}[\Phi(\lambda T)\Phi(R)] - \lambda\,\mathrm{Tr}[\Phi(T)\Phi(R)] \\
&= \mathrm{Tr}(\lambda TR) - \lambda\,\mathrm{Tr}(TR) \\
&= \lambda\,\mathrm{Tr}(TR) - \lambda\,\mathrm{Tr}(TR) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme Φ est surjective et conserve les opérateurs idempotents de rang 1 nous avons, quitte à remplacer $\Phi(R)$ par R, que $\mathrm{Tr}[(\Phi(\lambda T) - \lambda\Phi(T))R] = 0$ pour tout R un opérateur idempotent de rang 1. Alors, nous avons $\mathrm{Tr}[(\Phi(\lambda T) - \lambda\Phi(T))S] = 0$ pour tout S dans $F(X)$. En appliquant le lemme 1.1 nous déduisons que $\Phi(\lambda T) - \lambda\Phi(T) = 0$. D'où le résultat. ∎

Preuve du théorème 1.1. Les lemmes 1.5 et 1.7 montrent respectivement que Φ conserve les opérateurs idempotents de rang 1 et que la restriction de Φ à $F(X)$ est 1-homogène. Ainsi nous sommes dans les hypothèses du théorème principal de ([12, Main theorem, Section 4, p. 250]) qui affirme que Φ a l'une des formes suivantes :

$$\Phi(T) = ATA^{-1}, \quad \text{pour tout } T \in F(X), \tag{1}$$

où $A : X \to X$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire bornée, ou bien

$$\Phi(T) = BT^* B^{-1}, \quad \text{pour tout } T \in F(X), \tag{2}$$

où $B : X' \to X$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire bornée, ou bien

$$\Phi(x \otimes f) = Cx \otimes (C^{-1})^* f, \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et } f \in X', \tag{3}$$

où $C : X \to X$ est une application anti $\mathbb{C}$-linéaire bornée, ou bien

$$\Phi(x \otimes f) = Df \otimes (D^{-1})^* Kx, \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et } f \in X', \tag{4}$$

où $D : X' \to X$ est une application anti $\mathbb{C}$-linéaire bornée et K l'injection canonique de X dans X''.

D'après le lemme 1.7 Φ est 1-homogène sur $F(X)$, ce qui montre que les situations (3) et (4) ne peuvent pas avoir lieu. Par conséquent Φ a l'une des formes (1) ou (2). Tout ce qui reste à démontrer c'est que A et B sont $\mathbb{C}$-linéaires. Montrons que A est $\mathbb{C}$-linéaire, c'est à dire $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ pour tout $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour $T = \lambda x \otimes f \in F(X)$ nous avons d'après le lemme 1.7 que $\lambda\Phi(x \otimes f) = \Phi(\lambda x \otimes f) = A(\lambda x \otimes f)A^{-1}$, ce qui implique que $\lambda\Phi(x \otimes f)A = A(\lambda x \otimes f)$ c'est à dire $\lambda A(x \otimes f)A^{-1}A = A(\lambda x \otimes f)$ et par suite $\lambda A(x \otimes f) = A(\lambda x \otimes f)(*)$. Choisissons $z \in X$ tel que $f(z) = 1$ et appliquons la relation (*) à z. Nous obtenons donc $\lambda A(x) = A(\lambda x)$. Par conséquent A est $\mathbb{C}$-linéaire. Pour montrer que B est $\mathbb{C}$-linéaire nous pouvons suivre la même démarche faite pour A. ∎

Preuve du théorème 1.2. *Étape* 1. Montrons qu'ou bien $\Phi(T) = ATA^{-1}$ ou bien $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout opérateur $T \in B(X)$ ayant un spectre fini, où $A : X \to X$ et $B : X \to X$ sont des isomorphismes linéaires bornés.

D'après le théorème 1.1 nous avons ou bien $\Phi(T) = ATA^{-1}$, ou bien $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in F(X)$, où $A : X \to X$ et $B : X' \to X$ sont des isomorphismes linéaires bornés. Plaçons nous dans la situation où $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in F(X)$ et montrons que $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$ ayant un spectre fini. Soient $T \in B(X)$ ayant un spectre fini et R un opérateur idempotent de rang 1. Comme Φ est surjective et conserve les opérateurs idempotents de rang 1 dans les deux sens, il existe un opérateur idempotent de rang 1, $S \in B(X)$ tel que $R = \Phi(S) = ASA^{-1}$. Le lemme 1.6 entraîne :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[(\Phi(T) - ATA^{-1})R] &= \mathrm{Tr}(\Phi(T)R) - \mathrm{Tr}((ATA^{-1})R) \\ &= \mathrm{Tr}[\Phi(T)\Phi(S)] - \mathrm{Tr}[(ATA^{-1})(ASA^{-1})] \\ &= \mathrm{Tr}(TS) - \mathrm{Tr}(ATSA^{-1}). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{rang}\,(ATSA^{-1}) = \mathrm{rang}\,(TS) \leq 1$ et $\sigma(ATSA^{-1}) - \{0\}$ coïncide avec $\sigma(TS) - \{0\}$ (voir [3, Lemme 3.1.2]), nous avons $\mathrm{Tr}(ATSA^{-1}) = \mathrm{Tr}(TS)$. Par conséquent $\mathrm{Tr}[(\Phi(T) - ATA^{-1})R] = 0$. Puisque $F(X)$ est linéairement engendré par les opérateurs idempotents de rang 1 nous déduisons que $\mathrm{Tr}[(\Phi(T) - ATA^{-1})R] = 0$ pour tout $R \in F(X)$. D'après le lemme 1.1 nous avons $\Phi(T) - ATA^{-1} = 0$. Donc $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout opérateur $T \in B(X)$ ayant un spectre fini. De la même manière nous montrons que dans la situation où $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in F(X)$ nous avons aussi $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout opérateur $T \in B(X)$ ayant un spectre fini.

Étape 2. Montons que $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$.

D'après l'étape 1 nous avons ou bien $\Phi(T) = ATA^{-1}$ ou bien $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout opérateur $T \in B(X)$ ayant un spectre fini. Pearcy et Topping [16] ont montré que chaque opérateur dans $B(X)$ (X est un espace de Hilbert complexe de dimension infinie) est la somme de cinq opérateurs idempotents et cinq opérateurs de carré nul. Comme tout opérateur idempotent ou de carré nul est de spectre fini, nous déduisons qu'ou bien $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$, ou bien $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$. Comme Φ conserve le spectre de surjection, le cas $\Phi(T) = BT^*B^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$ entraîne que T est surjective si et seulement si T^* est surjective ce qui n'est pas vrai pour un opérateur shift. Par conséquent cette situation ne peut pas avoir lieu. Donc $\Phi(T) = ATA^{-1}$ pour tout $T \in B(X)$. ∎

Références

[1] Jaafarian, A.A., Sourour, A.R., Spectrum preserving linear maps, *J. Funct. Anal.,* **66** (1986), 255–261.

[2] Sourour, A.R, Invertibility preserving maps on L(X), *Trans. Amer. Math. Soc.,* **348** (1996), 13–30.

[3] Aupetit, B., "A Primer on Spectral Theory", Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] Aupetit, B., Sur les transformations qui conservent le spectre, in "Banach Algebras **97**", De Gryter, Berlin, 1998, 55–78.

[5] Aupetit, B., du Toit Mouton, H., Trace and determinant in Banach algebras, *Studia. Math.,* **121** (1996), 115–136.

[6] Šemrl, P., Two characterizations of automorphisms on $B(X)$, *Studia. Math.,* **105** (1993), 143–149.

[7] Hou, J.C., Rank-preserving linear maps on $B(X)$, *Science in China (Ser. A),* **32(8)** (1989), 929–940.

[8] Ech-chérif El Kettani, M., El bouchibti, E., Sur les transformations additives qui conservent le spectre ponctuel, *Extracta Mathematicae,* **16(3)** (2001), 343–349.

[9] Choi, M.D., Hadwin, D., Nordgren, E., Radjavi, H., Rosenthal, P., Positive linear maps preserving invertibility, *J. Funct. Anal.,* **59** (1984), 462–469.

[10] Choi, M.D., Jafarian, A.A., Radjavi, H., Linear maps preserving commutativity, *Linear Algebra Appl.,* **87** (1987), 227–241.

[11] Omladič, M., Šemrl, P., Spectrum-preserving additive maps, *Linear Algebra Appl.,* **153** (1991), 67–72.

[12] Omladič, M., Šemrl, P., Additive mappings preserving operators of rank one, *Linear Algebra Appl.,* **182** (1993), 239–256.

[13] Omladič, M., On operators preserving commutativity, *J. Funct. Anal.,* **66** (1986), 105–122.

[14] Omladič, M., On operators preserving numerical range, *Linear Algebra Appl.,* **134** (1990), 31–51.

[15] Marcus, M., Moyls, B.N., Linear transformations on algebras of matrices, *Canad. J. Math.,* **11** (1959), 61–66.

[16] Pearcy, C., Topping, D., Sums of small numbers of idempotents, *Michigan Math. J.,* **14** (1967), 453–465.

[17] Laursen, K.B., Vrbovà, P., Some remarks on the surjectivity spectrum of linear operators, *Czechoslovak. Math. J.,* **39** (1989), 730–739.