EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **17**, Núm. 2, 247 – 257 (2002)

Ecuaciones Lineales y Anillos Conmutativos

J.J. Aparicio Pedreño

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística, Univ. Politécnica de Cartagena
30203 *Cartagena, Spain*

(Research paper presented by Juan A. Navarro)

AMS *Subject Class.* (2000): 13F05 *Received July* 2, 2001

Introducción

Sea un sistema (S) de ecuaciones lineales diofánticas (o con coeficientes en un dominio de ideales principales R) de la forma $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $m \times n$ con coeficientes en R, llamada matriz de coeficientes del sistema, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ es la matriz columna de las incógnitas, y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^t$ es la matriz columna de los términos independientes de (S); $(A \mid \mathbf{b})$ es la matriz ampliada al añadir a A la columna $\mathbf{b}$. Para una matriz M con coeficientes en R y de orden $m \times n$, se define el *i-ésimo ideal determinantal* de M como el ideal $\Delta_i(M)$ de R generado por los menores de orden i de M. Por convenio se definen $\Delta_0(M) = R$ y $\Delta_i(M) = (0)$ para $i > \min\{m, n\}$. Se llama *rango* de M, y se representa por $\mathrm{rg}(M)$, al mayor entero r para el que es $\Delta_r(M) \neq (0)$. Son conocidas varias condiciones necesarias y suficientes de compatibilidad, tal y como expresa el siguiente Teorema:

Teorema. *Son equivalentes:*

(a) *El sistema* (S) *es compatible.*

(b) *Las sucesiones de factores invariantes de la matriz A y de la matriz $(A \mid \mathbf{b})$ son iguales salvo asociados.*

(c) *Para cada entero $i \geq 0$, el máximo común divisor de los menores de orden i de A coincide con el máximo común divisor de los menores de orden i de $(A \mid \mathbf{b})$ salvo asociados.*

(d) $\Delta_i(A) = \Delta_i(A \mid \mathbf{b})$ *para todo* $i \geq 0$.

(e) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \mathbf{b}) = r$ *y* $\Delta_r(A) = \Delta_r(A \mid \mathbf{b})$.

En un cuerpo, el apartado (e) se reduce a la igualdad entre los rangos de A y $(A \mid \mathbf{b})$, y así, como caso particular del Teorema anterior aparece recogido el Teorema de Rouché-Frobenius.

Las equivalencias (a) $\Leftrightarrow$ (d) y (a) $\Leftrightarrow$ (e) sugieren la posibilidad de plantear las mismas para anillos conmutativos en general. Esta búsqueda de una mayor generalidad fue abordada ya por Steinitz en [9], al estudiar los sistemas sobre anillos de enteros algebraicos.

Ejemplos sencillos muestran que en anillos conmutativos arbitrarios no se satisfacen las equivalencias anteriores. Surge entonces naturalmente la pregunta de saber hasta donde se puede extender la validez de esas condiciones, es decir, ¿cuál es la máxima generalidad del Teorema de Rouché-Frobenius?

Esta pregunta fue contestada en [3] al suponer R dominio de integridad. Posteriormente en [5] se caracterizaron siguiendo métodos distintos, aquellos anillos conmutativos en general para los que se cumple (a) $\Leftrightarrow$ (d).

Nos referiremos a veces a los anillos que cumplen (a) $\Leftrightarrow$ (e) diciendo que satisfacen la propiedad de compatibilidad por rangos e ideales determinantales asociados al rango, o abreviadamente, que satisfacen la propiedad CR.

En este artículo caracterizamos en condiciones generales los anillos conmutativos que tienen la propiedad CR, sin presuponer que sean dominios de integridad. Nos basamos para ello fuertemente en el artículo [5] citado. En la primera parte de la demostración del Teorema 2.5 comprobamos que R debe de ser un dominio. Llegados a este punto podríamos terminar haciendo referencia a [3], en donde está tratado este caso. Sin embargo preferimos completar la demostración introduciendo una variante al establecer en un Lema el carácter local de la propiedad CR. Así, aunque como en [3] y en [5] utilizamos propiedades de factorización de ideales, conseguimos evitar algunos detalles molestos que de esta manera son aquí innecesarios.

Como consecuencia de 2.5, damos una caracterización de los dominios de Dedekind en términos que se refieren a propiedades de las ecuaciones lineales en R.

Al final hacemos notar que en ambos resultados podemos cambiar el rango de las matrices por el *rango reducido*. Para el estudio de los sistemas homogéneos sin condiciones restrictivas, McCoy introdujo en [7] el concepto de *rango reducido* de una matriz M, denotado por $\operatorname{rg}\operatorname{red}(M)$ y definido como el número entero

$$\operatorname{rg}\operatorname{red}(M) = \max\{i \in N \,:\, \operatorname{Ann}(\Delta_i(M)) = (0)\}.$$

Es evidente que si $\operatorname{Ann}(\Delta_i(M)) \neq (0)$, entonces $\operatorname{Ann}(\Delta_j(M)) \neq (0)$ para todo $j \geq i$, y que se cumple $0 \leq \operatorname{rg}\operatorname{red}(M) \leq \operatorname{rg}(M)$.

En todo el artículo denotaremos por R a un anillo conmutativo con elemento unidad.

1. Anillos de Prüfer

En lo sucesivo, $\mathrm{wD}(R)$ representa la dimensión débil de R, también llamada dimensión de torsión, cuya definición puede verse por ejemplo en [8].

TEOREMA 1.1. ([8, TH. 9.24 Y TH. 9.25]) *Son equivalentes:*

(a) *Todo ideal de R es plano.*

(b) $\mathrm{Tor}_2^R(\_\,,\,\_) = 0$.

(c) *Todo submódulo de un R-módulo plano es plano.*

(d) $\mathrm{wD}(R) \leq 1$.

DEFINICIÓN 1.2. Los anillos conmutativos que satisfacen una (y por tanto todas) de las condiciones del Teorema 1.1 se conocen como *anillos de Prüfer*. Llamaremos *dominios de Prüfer* a los anillos de Prüfer que son dominios de integridad.

Nota 1.3. Los anillos conmutativos R tales que $\mathrm{wD}(R) \leq 1$ fueron caracterizados por Endo en términos de sus anillos localizados respecto de ideales maximales [4, Prop. 11]. En [6] pueden verse además otras condiciones características de los anillos de Prüfer.

TEOREMA 1.4. ([6, TH. 1.4]) *Son equivalentes:*

(a) $\mathrm{wD}(R) \leq 1$.

(b) *Para cada ideal primo p de R, R_p es un anillo de valoración.*

(c) *Para cada ideal maximal m de R, R_m es un anillo de valoración.*

Nota 1.5. Para un sistema (S) con coeficientes en R podemos también considerar el sistema $(\mathrm{S})_p$ con coeficientes en el anillo localizado R_p, donde p es un ideal primo de R. Entonces, como consecuencia del carácter local de los epimorfismos en la categoría de R-módulos, se cumple:

PROPOSICIÓN 1.6. ([5]) *Son equivalentes:*

(a) (S) *es compatible en R.*

(b) $(\mathrm{S})_p$ *es compatible en* R_p *para todo ideal primo* p *de* R.

(c) $(\mathrm{S})_m$ *es compatible en* R_m *para todo ideal maximal* m *de* R.

Y cuando nos referimos a los dominios de Prüfer se satisface:

PROPOSICIÓN 1.7. ([3]) *Si* R *es un dominio de Prüfer, para todo sistema* (S) *de ecuaciones lineales con coeficientes en* R *son equivalentes:*

(a) (S) *es compatible.*

(b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \mathbf{b}) = r$ *y* $\Delta_r(A) = \Delta_r(A \mid \mathbf{b})$.

Demostración. Se cumple (a) $\Rightarrow$ (b) sobre cualquier anillo R, como es obvio por las relaciones de dependencia entre las columnas de $(A \mid \mathbf{b})$ cuando (S) es compatible.

Para probar (b) $\Rightarrow$ (a) podemos suponer por 1.6 que R es local. Todo ideal de R finitamente generado es plano, y en consecuencia o es el ideal (0), o es libre de rango 1 y por tanto principal. Entonces, aplicando el Lema de Nakayama, comprobamos que $\Delta_r(A \mid \mathbf{b})$ está generado por un menor H_r de orden r y distinto de 0 de la matriz A. Sea M_r la matriz formada por los términos de H_r. Podemos suponer que M_r está formada por las r primeras filas y por las r primeras columnas de A. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ las incógnitas del sistema. Para cualquier valor en R de las incógnitas no principales, $x_{r+1}, \ldots, x_n$, obtenemos un sistema formado por las r primeras ecuaciones de (S), con solución única en K cuerpo de las fracciones de R, y cuya matriz de coeficientes es M_r. Las fórmulas de Cramer nos dan una solución de ese sistema principal, para las incógnitas principales $x_1, x_2, \ldots, x_r$, cuyos valores, obtenidos como cocientes de determinantes, pertenecen a K. Además, dichos valores de las x_i están en R, dado que la expresión que determina x_i, tiene por numerador un elemento de $\Delta_r(A \mid \mathbf{b})$ y por denominador a H_r. Tan sólo resta añadir que las demás ecuaciones del sistema son combinación lineal de las r primeras, y que toda solución de dicho sistema principal lo es también del sistema completo. ∎

Nota 1.8. En la proposición anterior (demostrada por Steinitz en [9]) cuando R es un dominio de enteros algebraicos), la condición de que R sea de integridad es imprescindible. Por ejemplo, en $R = \mathbb{Z}/(10)$, el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x & = & 1 \\ 4y & = & 0 \end{array}\right\}$$

es incompatible a pesar de que $\mathrm{wD}(R) = 0$, y además $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \mathbf{b}) = 2$ y $\Delta_2(A) = \Delta_2(A \mid \mathbf{b}) = (\overline{6})$. Con mayor precisión, en el Teorema 2.5 veremos que la equivalencia de la proposición 1.7 es característica de los dominios de Prüfer.

Ejemplos 1.9. Son anillos de Prüfer: (1) todo cuerpo y todo dominio de ideales principales; (2) $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ siendo n un entero libre de cuadrados; en general todo anillo semisimple; (3) $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\,\right]$ (que no es un dominio de factorización única, y en consecuencia tampoco un dominio de ideales principales); en general todo dominio de Dedekind; (4) $R = (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}}$, y en general todo anillo absolutamente plano; (5) todo anillo de Boole, por ser absolutamente plano.

Las siguientes propiedades proporcionan un gran número de ejemplos de anillos de Prüfer: (a) Si R es de Prüfer, para toda parte multiplicativamente cerrada S de R, $S^{-1}R$ es de Prüfer, como resulta fácilmente de las propiedades de la dimensión homológica débil. (b) Si R es de Prüfer y es producto de los anillos R_i, $1 \leq i \leq h$, cada R_i es de Prüfer y todo producto finito de anillos de Prüfer es de Prüfer, dado que cada localizado del producto es isomorfo a un localizado de uno de los factores.

Pueden verse mas ejemplos y mas propiedades que contribuyen a la obtención de otros en [6].

2. Teorema de caracterización

Para demostrar nuestro principal resultado utilizaremos las propiedades que establecemos a continuación:

Proposición 2.1. *Son equivalentes:*

(a) *Todo ideal principal de R es plano.*

(b) *R_p es un dominio para todo ideal primo p.*

(c) *R_m es un dominio para todo ideal maximal m.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Un ideal principal $J \neq (0)$ de R_p es de la forma $(\frac{\alpha}{1})$, donde $\alpha \in R$ y $J = (\alpha)_p$ es el localizado del ideal principal (α) de R; J es R_p-plano [2, Chap. II, § 3, Prop. 13], y por ser de tipo finito como módulo sobre el anillo local R_p es R_p-libre. En particular $\frac{\alpha}{1}$ no es divisor de cero.

(b) $\Rightarrow$ (c) Evidente.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $J = (\alpha)$ ideal principal de R, de modo que J_m es un ideal principal en R_m generado por $\frac{\alpha}{1}$. Como R_m es un dominio, J_m es libre de rango 1 como R_m-módulo, o es el ideal (0). En cualquier caso es un R_m-módulo plano, y consiguientemente [2, Chap. II, §3, Prop. 15, Cor.], J es un R-módulo plano. ∎

LEMA 2.2. *Sea R un anillo conmutativo en el que todo ideal principal es plano, y sea $u \in R$. El ideal $I = \mathrm{Ann}(u)$ satisface $I^2 = I$.*

Demostración. El R-módulo $R/I \cong (u)$ es plano. Consideramos la composición $h : (R/I) \otimes_R I \to R/I$ de las aplicaciones lineales

$$(R/I) \otimes_R I \to (R/I) \otimes_R R \to R/I\,,$$

donde la primera es inyectiva y la segunda es el isomorfismo canónico. Entonces h es inyectiva y su imagen es $(R/I) \cdot I = 0$. En consecuencia es $(R/I) \otimes_R I = 0$. Pero por otra parte $(R/I) \otimes_R I \cong I/I^2$, de modo que se satisface $I/I^2 = 0$. ∎

LEMA 2.3. *Sea R un dominio. Son equivalentes:*

(a) *R tiene la propiedad CR.*

(b) *R_p tiene la propiedad CR para todo ideal primo p.*

(c) *R_m tiene la propiedad CR para todo ideal maximal m.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $(\overline{\mathrm{S}})$ un sistema de ecuaciones lineales en R_p. Podemos suponer (reduciendo todos los coeficientes y términos independientes a común denominador d, y multiplicando por d), que $(\overline{\mathrm{S}})$ es de la forma:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{1} x_j = \frac{b_i}{1} \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

(Los i-ésimos ideales determinantales del segundo sistema son iguales a los del primero mutiplicados por d^i. Como d es unidad en R_p, son iguales.) Denotamos $\overline{A}$ y $(\overline{A} \mid \overline{\mathbf{b}})$ a las matrices de coeficientes y ampliada de $(\overline{\mathrm{S}})$.

Consideramos el sistema (S) en R:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

con matrices A y $(A \mid \mathbf{b})$ de coeficientes y ampliada, respectivamente. Es claro que $\Delta_i(\overline{A}) = (\Delta_i(A))_p$, y que $\Delta_i(\overline{A} \mid \overline{\mathbf{b}}) = (\Delta_i(A \mid \mathbf{b}))_p$. Supongamos que $\operatorname{rg}(\overline{A}) = \operatorname{rg}(\overline{A} \mid \overline{\mathbf{b}}) = r$, y que $\Delta_r(\overline{A}) = \Delta_r(\overline{A} \mid \overline{\mathbf{b}})$. Distinguimos dos posibilidades:

(i) $\Delta_r(\overline{A}) = (1)$. Como R_p es local, existe algún menor H de orden r de $\overline{A}$ que es una unidad. Cambiando el orden de las ecuaciones y reordenando las incógnitas si es preciso, podemos suponer que está formado por las r primeras filas y columnas. Para cualquier valor en R_p de las incógnitas no principales $x_{r+1}, \ldots, x_n$, las fórmulas de Cramer (en K cuerpo de las fracciones de R_p y de R) nos dan los valores de las incógnitas principales $x_1, \ldots, x_r$, siendo cada una de ellas igual a un cociente de dos determinantes con denominador igual a H. Como H es unidad, $x_i \in R_p$ $(i = 1, \ldots, r)$, y el sistema principal formado por las r primeras ecuaciones, es compatible. Como las demás ecuaciones son combinación lineal de las r primeras, las soluciones del sistema principal lo son también del sistema completo, y $(\overline{\mathrm{S}})$ es compatible.

(ii) Supongamos que $\Delta_r(\overline{A}) \neq (1)$. Se tendrá entonces que los ideales $\Delta_r(A)$ y $\Delta_r(A \mid \mathbf{b})$ no cortan a $R - p$, y $(\Delta_r(A)_p = (\Delta_r(A \mid \mathbf{b}))_p \Rightarrow \Delta_r(A) = \Delta_r(A \mid \mathbf{b})$, dada la biyección entre ideales de R que no cortan a $R - p$, con los ideales extendidos en R_p. Como además el rango de (S) es también r, se sigue que (S) es compatible. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ es solución para (S), entonces $(\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1})$ es solución para $(\overline{\mathrm{S}})$, que es compatible.

(b) $\Rightarrow$ (c) Evidente.

(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos dado un sistema (S) en R como antes. Consideramos el sistema $(\overline{\mathrm{S}})$ también como antes en R_m, para m ideal maximal de R. Si es $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid \mathbf{b}) = r$ y $\Delta_r(A) = \Delta_r(A \mid \mathbf{b})$, entonces se tendrá $\operatorname{rg}(\overline{A}) = \operatorname{rg}(\overline{A} \mid \overline{\mathbf{b}}) = r$ y $\Delta_r(\overline{A}) = (\Delta_r(A))_m = (\Delta_r(A \mid \mathbf{b}))_m = \Delta_r(\overline{A} \mid \overline{\mathbf{b}})$, con lo que $(\overline{\mathrm{S}})$ es compatible. Como m es un ideal maximal arbitrario, de 1.6 se sigue que (S) es compatible, y tiene por tanto la propiedad CR. ∎

Nos basaremos también en el siguiente Lema que puede verse en la referencia indicada:

LEMA 2.4. ([5, LEMMA 5]) *Si R es un dominio local que no es un anillo de valoración, existen ideales finitamente generados α, β, γ satisfaciendo $\alpha \neq (0)$, $\beta \nsubseteq \gamma$ y $\alpha \cdot \beta \subseteq \alpha \cdot \gamma$.*

Podemos establecer ahora el siguiente Teorema que en [3] se obtiene cuando se supone que R es un dominio:

Teorema 2.5. *R es un dominio de Prüfer si y sólo si para todo sistema* (S) *de ecuaciones lineales en R son equivalentes:*

(a) (S) *es compatible.*

(b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \mathbf{b}) = r$ *y* $\Delta_r(A) = \Delta_r(A \mid \mathbf{b})$.

Demostración. Si R es un dominio de Prüfer ya vimos en 1.7 que se cumple (a) $\Leftrightarrow$ (b).

Recíprocamente, supongamos que en R se satisface (a) $\Leftrightarrow$ (b). Demostraremos en primer lugar que R es un dominio. Para eso, razonaremos como en [5, Th 6] para demostrar primero que R_p es un dominio para todo ideal primo p de R. Supongamos que $\frac{u}{1}$ es divisor de cero en R_p, y sea $\frac{u}{1} \cdot \frac{v}{1} = 0$, con $\frac{u}{1} \neq 0$ y $\frac{v}{1} \neq 0$. Sea $s \in R - p$ tal que $suv = 0$. Consideramos en R el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} u \cdot x & = & 0 \\ sv \cdot x & = & sv \end{array}\right\},$$

en el que se cumple $\Delta_1(A) = \Delta_1(A \mid \mathbf{b}) = (u, sv)$ y se tiene $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \mathbf{b}) = 1$. Este sistema debe tener solución, y en virtud de 1.6 también lo tendrá en R_p el correspondiente sistema. Pero si $\alpha \in R_p$ es solución, y denotamos m al maximal de R_p, $\frac{u}{1} \cdot \alpha = 0 \Rightarrow \alpha \in m$. Por otra parte, $\frac{sv}{1}(\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha - 1 \in m$. Contradicción.

Supongamos ahora que R admite un divisor de cero u. Por 2.1 todo ideal principal es plano, y por 2.2 el ideal $I = \mathrm{Ann}(u)$ satisface $I^2 = I$, y es distinto de los ideales (0) y (1). Sea $v \neq 0$, $v \in I$. Consideramos la sucesión exacta

$$0 \to (v) \to I\,.$$

Multiplicando tensorialmente por $R/I \cong (u)$ obtenemos la sucesión

$$0 \to \frac{(v)}{I \cdot (v)} \to \frac{I}{I^2} = 0$$

también exacta. Entonces es $\frac{(v)}{I \cdot (v)} = 0$ y $(v) = I \cdot (v)$. Sea i elemento de I tal que $v = i \cdot v$. Estudiamos en R el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} i \cdot x \qquad & = & 1 \\ v \cdot y & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Se cumple: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \mathbf{b}) = 2$ y $\Delta_2(A) = \Delta_2(A \mid \mathbf{b}) = (v)$. Pero es incompatible por ser $I \neq (1)$. Contradicción.

Demostraremos a continuación que R_m es un anillo de valoración para todo ideal maximal m. Razonaremos como en [3] y en [5]. Supongamos lo contrario para cierto maximal m_0. Por el Lema 2.4, existen ideales finitamente generados α, β, γ de R_{m_0} satisfaciendo $\alpha \neq (0)$, $\beta \nsubseteq \gamma$ y $\alpha \cdot \beta \subseteq \alpha \cdot \gamma$. Sean $a_1, \ldots, a_n$ generadores de α, $g_1, \ldots, g_m$ generadores de γ, y $b \in \beta$, $b \notin \gamma$. Consideramos en R_{m_0} el sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n & = & 0 \\ \qquad\qquad\qquad g_1x_{n+1} + \cdots + g_mx_{n+m} & = & b \end{array}\right\},$$

que es incompatible. Sin embargo $\Delta_2(A) = \alpha \cdot \gamma = \Delta_2(A \mid \mathbf{b}) \neq (0)$ y $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \mathbf{b}) = 2$. Además, por 2.3, R_{m_0} tiene la propiedad CR. Contradicción. ∎

Nota 2.6. Es claro que si un anillo tiene la propiedad CR, se cumple para todo sistema la equivalencia (a) $\Leftrightarrow$ (d) del Teorema enunciado en la Introducción. Haciendo referencia a [5] obtendríamos $\mathrm{wD}(R) \leq 1$, con lo que podríamos limitarnos a demostrar que R es un dominio, para lo que sería suficiente en esas condiciones utilizar el Lema 2.2. Hemos preferido sin embargo dar una demostración completa en la que además de probar que R es dominio introducimos una variante de las demostraciones dadas en [3] y en [5], basada en el carácter local de la propiedad CR que demostramos en el Lema 2.3.

Aunque para algunos autores los dominios de Dedekind son anillos de dimensión uno, nosotros nos referiremos a los dominios de Dedekind en el sentido de [2] y de [10], que incluye también a los cuerpos. Obtenemos ahora como consecuencia de 2.5 la siguiente caracterización, en términos que se refieren a propiedades de las ecuaciones lineales:

COROLARIO 2.7. *R es un dominio de Dedekind si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) *Para todo subconjunto $T \subseteq R$, $T \neq \emptyset$, existe un subconjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq T$ de modo que la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ es compatible para todo $b \in T$.*

(b) *Un sistema* (S) *en R es compatible si y sólo si se cumplen* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \mathbf{b}) = r$ *y* $\Delta_r(A) = \Delta_r(A \mid \mathbf{b})$.

Demostración. La condición (a) equivale a que R es noetheriano. Por otra parte, R es un dominio de Dedekind si y sólo si R es un dominio de Prüfer noetheriano. ∎

Veremos a continuación que respecto del rango reducido pueden establecerse análogas afirmaciones:

COROLARIO 2.8. *R es un dominio de Prüfer si y sólo si para todo sistema* (S) *de ecuaciones lineales en R son equivalentes:*

(a) (S) *es compatible.*

(b) $\operatorname{rg}\operatorname{red}(A) = \operatorname{rg}\operatorname{red}(A \mid \mathbf{b}) = r$ *y* $\Delta_r(A) = \Delta_r(A \mid \mathbf{b})$.

Demostración. Si R es un dominio de Prüfer entonces $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}\operatorname{red}(M)$ para toda matriz M, y la equivalencia entre (a) y (b) se sigue de 1.7.

Recíprocamente, supongamos se cumple (a) $\Leftrightarrow$ (b). Sea a un divisor de cero en R. El sistema en R reducido a la ecuación $0 \cdot x = a$ cumple $\operatorname{rg}\operatorname{red}(A) = \operatorname{rg}\operatorname{red}(A \mid \mathbf{b}) = 0$, y $\Delta_0(A) = \Delta_0(A \mid \mathbf{b}) = R$, y por hipótesis es compatible. Así, $a = 0$ y R es, en consecuencia, un dominio. Para toda matriz M se satisface entonces

$$\operatorname{rg}\operatorname{red}(M) = \operatorname{rg}(M)\,,$$

y (a) $\Leftrightarrow$ (b) para todo sistema (S) junto con el Teorema 2.5 nos permite afirmar que R es un dominio de Prüfer. ∎

Análogamente podemos afirmar:

COROLARIO 2.9. *R es un dominio de Dedekind si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) *Para todo subconjunto $T \subseteq R$, $T \neq \emptyset$, existe un subconjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq T$ de modo que la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ es compatible para todo $b \in T$.*

(b) *Un sistema* (S) *en R es compatible si y sólo si se cumplen* $\operatorname{rg}\operatorname{red}(A) = \operatorname{rg}\operatorname{red}(A \mid \mathbf{b}) = r$ *y* $\Delta_r(A) = \Delta_r(A \mid \mathbf{b})$.

Nota 2.10. La equivalencia "(S) compatible $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid \mathbf{b})$ para todo sistema (S) en R" es característica de los cuerpos. Al sustituir el rango por el rango reducido se obtiene otra equivalencia que también caracteriza a los cuerpos.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Sánchez Giralda, por sus valiosos comentarios.

Referencias

[1] Atiyah, M.F., Macdonald, I.G., "Introduction to Conmutative Algebra", Addison-Wesley, Massachusetts, 1969.

[2] Bourbaki, N., "Algèbre Commutative", Masson, Paris, 1985.

[3] Camion, P., Levy, L.S., Mann, H.B., Linear equations over a commutative ring, *J. Algebra* **18** (1971), 432 – 446.

[4] Endo, S., On semihereditary rings, *J. Math. Soc. Japan.* **13** (1961), 109 – 119.

[5] Hermida, J.A., Sánchez Giralda, T., Linear equations over commutative rings and determinantal ideals, *J. Algebra* **99** (1) (1986), 72 – 79.

[6] Hermida, J.A., Sánchez Giralda, T., , Sur les anneaux de Prüfer, in Travaux en Cours No. 22, Hermann, Paris, 1987, 117 – 123.

[7] Mc Coy, N.H., "Rings and Ideals", Carus Mathematical Mongraph No. 8, The Mathematical Association of America, 1948.

[8] Rotman, J.J., "An Introduction to Homological Algebra", Pure and App. Math. No. 85, Academic Press, New York-London, 1979.

[9] Steinitz, E., Rechteckige systeme und moduln in algebraischen Zahlkörpern, *Math. Ann.* **71** (1912), 328 – 354.

[10] Zariski, O., Samuel, P., "Commutative Algebra" Vol. I, Springer Verlag, New York, 1975.