EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **17**, Núm. 2, 211 – 219 (2002)

Quelques Nouveaux Théorèmes du Point Fixe dans les Espaces Topologiques de Type *F*

M. Aamri, D. El Moutawakil

Département de Mathématiques et Informatiques, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca, Maroc, e-mail: D.Elmoutawakil@math.net

(Research paper presented by S. Dierolf)

AMS *Subject Class.* (2000): 47H10 *Received May* 30, 2001

1. Introduction

En 1996, Jin-Xuan Fang [4] a introduit le concept d'espace topologique de type F et a montré que les espaces métriques, les espaces vectoriels topologiques séparés et les espaces métriques probabilistes de Menger, y sont des cas particuliers. Ensuite, il a donné une généralisation du théorème du point fixe de Caristi, reconnu comme un des fameux théorèmes dans la théorie du point fixe, au cas des espaces topologiques de type F. Rappelons le théorème (3.1), établi par Fang dans [4], qui généralise le théorème de Caristi [1] :

Théorème 1.1. [4] *Soit (X, θ) un espace topologique de type F séquentiellement complet de famille générateur $\{d_\lambda, \lambda \in D\}$. Soient $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application semi-continue inférieurement et $k : D \longrightarrow]0, +\infty[$ une application décroissante. Supposons qu'une application $T : X \longrightarrow X$ vérifie :*

$$d_\lambda(x, Tx) \leq k(\lambda)[\phi(x) - \phi(Tx)],\ \forall \lambda \in D,\ \forall x \in X$$

Alors, l'application T a un point fixe.

Notre but dans cet article est d'étudier l'existence d'un point fixe d'une application $T : (X, d) \longrightarrow (X, d)$, vérifiant :

$$d_\lambda(x, Tx) \leq k(\lambda)[\phi(Tx) - \phi(x)],\ \forall \lambda \in D,\ \forall x \in X$$

où l'application $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est arbitraire.

Commençons tout d'abord par donner la définition d'espace topologique de type F [4].

DÉFINITION 1.1. Un espace topologique (X, θ) est dit de type F s'il est séparé et pour tout $x \in X$, il existe une base de voisinages $F_x = \{U_x(\lambda, t)/\lambda \in D, t > 0\}$, où $(D, <)$ est un ensemble ordonné, de x telle que :

(1) Si $y \in U_x(\lambda, t)$, alors $x \in U_y(\lambda, t)$.
(2) $U_x(\lambda, t) \subset U_x(\mu, s)$ pour $\lambda < \mu,\ t < s$.
(3) $\forall \lambda \in D$, $\exists \mu \in D$ tel que $\lambda < \mu$ et $U_x(\mu, t_1) \cap U_y(\mu, t_2) \neq \emptyset$, implique $y \in U_x(\lambda, t_1 + t_2)$.
(4) $X = \cup_{t>0} U_x(\lambda, t)$, $\forall \lambda \in D$, $\forall x \in X$.

Ensuite, Fang a montré que pour tout espace topologique (E, θ) de type F, il existe une famille $M = \{d_\lambda, \lambda \in D\}$ de quasi-métriques sur X satisfaisant :

(1) $d_\lambda(x, y) = 0\ \forall \lambda \in D$ ssi $x = y$,
(2) $d_\lambda(x, y) = d_\lambda(y, x)$,
(3) $d_\lambda(x, y) \leq d_\mu(x, y)$ pour $\lambda < \mu$,
(4) $\forall \lambda \in D$, $\exists \mu \in D$ tel que $\lambda < \mu$ et $d_\lambda(x, y) \leq d_\mu(x, z) + d_\mu(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$,

telle que $\theta_M = \theta$ où θ_M est la topologie induite par la famille M.

2. Résultats

THÉORÈME 2.1. *Soit (X, θ) un espace topologique de type F séquentiellement complet de famille générateur $\{d_\lambda, \lambda \in D\}$. Soient $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application et $k : D \longrightarrow]0, +\infty[$ une application décroissante. Supposons qu'une application $T : X \longrightarrow X$ vérifie :*

(1) $d_\lambda(x, Tx) \leq k(\lambda)[\phi(Tx) - \phi(x)],\ \ \forall \lambda \in D,\ \ \forall x \in X.$
(2) *T est surjective de graphe séquentiellement fermé.*

Alors, l'application T a un point fixe.

Preuve. Soit $x_0 \in X$. Choisissons $x_1 \in X$ tel que : $x_0 = Tx_1$. De même, choisissons $x_2 \in X$ tel que : $x_1 = Tx_2$. Plus généralement, choisissons $x_{n+1} \in X$ tel que : $x_n = Tx_{n+1}$. Soit $\lambda \in D$, alors d'après l'hypothèse (1), on a :

$$\begin{aligned} d_\lambda(x_n, x_{n+1}) &= d_\lambda(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq k(\lambda)[\phi(Tx_{n+1}) - \phi(x_{n+1})] \\ &= k(\lambda)\phi(x_n) - k(\lambda)\phi(x_{n+1}) \end{aligned}$$

Pour tout $\lambda \in D$, considérons la suite réelle (a_n) définie par : $a_n = k(\lambda)\phi(x_n),\ n = 1, 2, ...$ La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0, donc, elle est convergente. De plus, pour tout $\lambda \in D$, $\exists \mu_1 \in D$ tel que $\lambda < \mu_1$ et

$$d_\lambda(x_n, x_{n+m}) \leq d_{\mu_1}(x_n, x_{n+1}) + d_{\mu_1}(x_{n+1}, x_{n+m})$$

de même, $\exists \mu_2 \in D$ tel que $\mu_1 < \mu_2$ et

$$d_{\mu_1}(x_{n+1}, x_{n+m}) \leq d_{\mu_2}(x_{n+1}, x_{n+2}) + d_{\mu_2}(x_{n+2}, x_{n+m})$$

et ainsi de suite, on montre qu'il existe $\lambda < \mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_{m-1}$ tels que

$$d_\lambda(x_n, x_{n+m}) \leq d_{\mu_1}(x_n, x_{n+1}) + d_{\mu_2}(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d_{\mu_{m-1}}(x_{n+m-1}, x_{n+m})$$

donc

$$\begin{aligned} d_\lambda(x_n, x_{n+m}) \leq k(\mu_1)(a_n - a_{n+1}) + k(\mu_2)(a_{n+1} - a_{n+2}) + ... \\ + k(\mu_{m-1})(a_{n+m-1} - a_{n+m}), \end{aligned}$$

ainsi, puisque l'application k est décroissante, on a

$$d_\lambda(x_n, x_{n+m}) \leq k(\lambda)(a_n - a_{n+m}),$$

ce qui montre que la suite (x_n) est de Cauchy. Ainsi, puisque X est séquentiellement complet, il existe $a \in X$ tel que $\lim_n x_n = a$. On a $\lim_n Tx_n = \lim_n x_n = a$, ce qui implique $Ta = a$, puisque le graphe de l'application T est séquentiellement fermé. ∎

Sachant que tout espace métrique (X, d) est un espace topologique de type F où l'ensemble ordonné D est arbitraire et

$$d_\lambda(x, y) = d(x, y), \quad \forall \lambda \in D,$$

Prenons $k(\lambda) = 1$, $\forall \lambda \in D$; alors on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe une application $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :*

(1) $d(x, Tx) \leq \phi(Tx) - \phi(x), \ \forall x \in X.$

(2) *T est surjective de graphe fermé.*

Alors, l'application T a un point fixe.

Exemples. 1.- Soit $X = \mathbb{R}^+$. Considérons les applications T et ϕ définies sur X par :

$$Tx = 2x \text{ et } \phi(x) = 3x, \quad \forall x \in X$$

l'application T est surjective et de graphe fermé. De plus, on a :

$$|x - Tx| = x \leq 3x = \phi(Tx) - \phi(x), \quad \forall x \in X$$

l'application T vérifie les hypothèses du corrolaire précédent et $T0 = 0$.

2.- Soit $X = \mathbb{R}^+$. Considérons l'application T définie sur X par :

$$Tx = \begin{cases} \tan x & \text{si } x \in [0, \pi/2[\\ x & \text{si } x \in [\pi/2, +\infty[\end{cases}$$

l'application T est surjective et de graphe fermé. De plus, On a :

$$|x - Tx| = \begin{cases} \tan x - x & \text{si } x \in [0, \pi/2[\\ 0 & \text{si } x \in [\pi/2, +\infty[\end{cases}$$

Considérons l'application ϕ définie sur X par $\phi(x) = 2x$. On a :

$$\phi(Tx) - \phi(x) = \begin{cases} 2(\tan x - x) & \text{si } x \in [0, \pi/2[\\ 0 & \text{si } x \in [\pi/2, +\infty[\end{cases}$$

il est clair que :

$$|x - Tx| \leq \phi(Tx) - \phi(x), \;\; \forall x \in X$$

Remarquons que l'ensemble des points fixes de T est non vide et non réduit à un seul point.

Remarques 2.1. 1) Si on suppose que l'application ϕ est majorée, alors l'application T aura un point fixe sans être surjective. En effet, pour tout $x \in X$, on a :

$$d_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) \leq k(\lambda)(a_{n+1} - a_n)$$

où $a_n = \phi(T^n x)$. La suite (a_n) est convergente puisqu'elle est croissante et majorée, ce qui implique que la suite $(T^n x)$ converge vers un $a \in X$ (X est complet). Ainsi, puisque le graphe de T est fermé, on a $Ta = a$.

2) Soient $X = \mathbb{R}^+$, $Tx = x + 1$ et $\phi(x) = 2x$. On a :

$$|x - Tx| = 1 < 2 = \phi(Tx) - \phi(x), \; \forall x \in X;$$

l'application T est de graphe fermé mais elle n'est pas surjective. De plus, l'application ϕ n'est pas majorée. Remarquons que T ne possède aucun point fixe.

3) Le point fixe dans le théorème 2.1 n'est pas forcément unique puisque l'application Id_X vérifie les hypothèses du théorème 2.1.

Corollaire 2.2. *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \longrightarrow X$ *une application telle que :*

(1) $kd(x, Tx) \leq d(Tx, T^2x)$, $k > 1$, $\forall x \in X$.
(2) *T est surjective de graphe fermé.*
Alors, l'application T a un point fixe.

Preuve. Soit $x \in X$. On a

$$(k-1)d(x, Tx) \leq d(Tx, T^2x) - d(x, Tx);$$

considérons l'application $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\phi(x) = \frac{1}{k-1} d(x, Tx), \ \forall x \in X;$$

alors, pour tout $x \in X$, on a $d(x, Tx) \leq \phi(Tx) - \phi(x)$. Du corollaire précédent, il résulte que l'application T admet un point fixe dans X. ∎

Corollaire 2.3. *Soit (X, θ) un espace vectoriel topologique séparé et séquentiellement complet tel que la famille $\{U_\lambda, \lambda \in D\}$ est une base de voisinages équilibrés de 0 dans X. Soient $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application et $k : D \longrightarrow]0, +\infty[$ une application décroissante. Supposons qu'une application $T : X \longrightarrow X$ vérifie :*
(1) $\psi(x) = \phi(Tx) - \phi(x) \geq 0$, $\forall x \in X$.
(2) $x - Tx \in k(\lambda)\psi(x)U_\lambda$, $\forall x \in X$.
(3) *T est surjective de graphe séquentiellement fermé.*
Alors, l'application T a un point fixe.

Preuve. Dans [4], on a muni D de l'ordre $\lambda < \mu \iff U_\mu \subset U_\lambda$ et on a montré que X est un espace topologique de type F où

$$d_\lambda(x, y) = \inf\{t > 0 | x - y \in tU_\lambda\}, \ \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in D;$$

ceci implique, d'après les hypothèses (1) et (2) ci-dessus, que

$$d_\lambda(x, Tx) \leq k(\lambda)[\phi(Tx) - \phi(x)], \ \forall \lambda \in D, \ \forall x \in X$$

Ainsi, d'après le théorème 2.1, l'application T possède un point fixe. ∎

Remarque 2.1. Dans [4, Théorème 3.1], l'application ϕ est supposée semi-continue inférieurement. Il a été observé que l'application T aura des points fixes si elle est de graphe séquentiellement fermé et vérifie :

$$d_\lambda(x, Tx) \leq k(\lambda)[\phi(x) - \phi(Tx)], \ \forall \lambda \in D, \ \forall x \in X,$$

où l'application ϕ est arbitraire. Considérons l'exemple suivant :

Soit $X = [0, +\infty[$. Considérons les deux applications T et ϕ définient par :

$$Tx = \frac{1}{2}x \;\; et \;\; \phi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 2x & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

on a :

$$|x - Tx| = \frac{1}{2}x \;\; et \;\; \phi(x) - \phi(Tx) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x \in [0,1[\\ \frac{3}{2}x & \text{si } x \in [1,2[\\ x & \text{si } x \in [2,+\infty[\end{cases}$$

Donc, on a :

$$|x - Tx| \leq \phi(x) - \phi(Tx), \;\; \forall x \in X.$$

Remarquons que $T0 = 0$. Dans cet exemple, T est de graphe fermé et l'application ϕ n'est pas semi-continue inférieurement sur X puisqu'elle ne l'est pas en 1.

La remarque ci-dessus nous permet de voir le [4, théorème 3.1] d'une autre façon dans le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit (X, θ) un espace topologique de type F séquentiellement complet de famille générateur $\{d_\lambda, \lambda \in D\}$. Soient $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application et $k : D \longrightarrow]0, +\infty[$ une application décroissante. Supposons qu'une application $T : X \longrightarrow X$ vérifie :*

(1) *$d_\lambda(x, Tx) \leq k(\lambda)[\phi(x) - \phi(Tx)], \;\; \forall \lambda \in D, \;\; \forall x \in X.$*

(2) *T est de graphe séquentiellement fermé.*

Alors, l'application T a un point fixe.

Preuve. Considérons dans X, la suite (x_n) définie par $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = Tx_n, \;\; n = 0, 1, ...$ On montre, presque comme dans la démonstration du théorème 2.1, que (x_n) est de Cauchy et par suite $\lim_n Tx_n = \lim_n x_n = a$ pour un certain $a \in X$. Ainsi, puisque le graphe de T est séquentiellement fermé, on a $Ta = a$. ∎

Corollaire 2.4. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application de graphe fermé. Supposons qu'il existe une application $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que*

$$d(x, Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx), \;\; \forall x \in X.$$

Alors, l'application T a un point fixe.

3. Application

Théorème 3.1. *Soient* (E, θ_1) *et* (F, θ_2) *des espaces topologiques de type* F *séquentiellement complets de familles générateurs* $\{d_\lambda, \lambda \in D_1\}$ *(resp.,* $\{d_\lambda, \lambda \in D_2\}$*). Soient* $v : E \longrightarrow F$ *une application de graphe séquentiellement fermé et* $k_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *et* $k_2 : F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *des applications décroissantes. Soient* $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *et* $\psi : F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *deux applications. Supposons qu'une application* $T : E \longrightarrow E$ *vérifie :*

(1) $d_\lambda(x, Tx) + d_\mu(v(x), v(Tx)) \leq k_1(\lambda)(\phi(Tx) - \phi(x)) + k_2(\mu)(\psi(v(Tx)) - \psi(v(x)))$, $\forall x \in E$, $\forall(\lambda, \mu) \in D_1 \times D_2$.

(2) *l'application* T *est surjective de graphe séquentiellement fermé.*

Alors, T *a un point fixe.*

Preuve. Munissons l'ensemble $D = D_1 \times D_2$ de l'ordre suivant :

$$(\lambda_1, \mu_1) <_D (\lambda_2, \mu_2) \Longleftrightarrow \lambda_1 <_{D_1} \lambda_2 \quad \text{et} \quad \mu_1 <_{D_2} \mu_2.$$

Pour tout $(\lambda, \mu) \in D$, considérons l'application $\psi_{\lambda,\mu}$ définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$\psi_{\lambda,\mu}(x, y) = d_\lambda(x, y) + d_\mu(v(x), v(y))$$

Montrons que $\psi_{\lambda,\mu}$ est une quasi-distance sur E :

(1) $\psi_{\lambda,\mu}(x, y) = 0 \Longrightarrow d_\lambda(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.

(2) $\psi_{\lambda,\mu}(x, y) = \psi_{\lambda,\mu}(y, x)$, $\forall(\lambda, \mu) \in D^2$.

(3) Soit $(\lambda, \alpha, \mu, \beta) \in {D_1}^2 \times {D_2}^2$ tel que : $(\lambda, \mu) <_D (\alpha, \beta)$. $\forall(x, y) \in E^2$, $d_\lambda(x, y) \leq d_\alpha(x, y)$ et $d_\mu(v(x), v(y)) \leq d_\beta(v(x), v(y))$. Donc : $\psi_{\lambda,\mu}(x, y) \leq \psi_{\alpha,\beta}(x, y)$.

(4) Soit $(\lambda, \mu) \in D_1 \times D_2$, $\exists(\alpha, \beta) \in D_1 \times D_2$, tel que $(\lambda, \mu) <_D (\alpha, \beta)$ et $d_\lambda(x, y) \leq d_\alpha(x, z) + d_\alpha(z, y)$ et $d_\mu(v(x), v(y)) \leq d_\beta(v(x), v(z)) + d_\beta(v(z), v(y))$.

Ainsi, $\forall(\lambda, \mu) \in D_1 \times D_2$, $\exists(\alpha, \beta) \in D_1 \times D_2$, tel que : $(\lambda, \mu) <_D (\alpha, \beta)$ et $\psi_{\lambda,\mu}(x, y) \leq \psi_{\alpha,\beta}(x, z) + \psi_{\alpha,\beta}(z, y)$, $\forall(x, y, z) \in E^3$.

Montrons que E muni de la famille $\{\psi_{\lambda,\mu}/(\lambda, \mu) \in D\}$, noté E', est séquentiellement complet.

Soit (x_n) une suite de Cauchy de E', alors (x_n) (resp., $v(x_n)$ est une suite de Cauchy dans (E, θ_1) (resp., dans (F, θ_2)), ce qui implique que $\lim_n x_n = x \in E$ et $\lim_n v(x_n) = y \in F$. Or le graphe de l'application v est séquentiellement fermé, donc : $v(x) = y$, et par suite, (x_n) converge, dans E', vers x. Ainsi E' est séquentiellement complet.

D'autre part, on a :

$$\psi_{\lambda,\mu}(x, Tx) \leq k(\lambda, \mu)(f(Tx) - f(x)) \quad , \forall(\lambda, \mu) \in D_1 \times D_2, \quad \forall x \in E$$

où f (resp., k) est une application définie sur E (resp., sur $D_1 \times D_2$) à valeurs dans E (resp., dans $\mathbb{R}^+$) par :

$$f(x) = \phi(x) + \psi ov(x), \ \forall x \in E \text{ et}$$
$$k(\lambda, \mu) = \max\{k_1(\lambda), k_2(\mu)\}, \ \forall(\lambda, \mu) \in D_1 \times D_2.$$

Il est clair que l'application k est décroissante. Il résulte du théorème 2.1 que T a un point fixe. ∎

Examinons le cas de deux espaces métriques (E, d_1) et (F, d_2) où

$$d_\lambda(x, y) = d_1(x, y), \ \forall\lambda \in D_1 \ et\ d_\lambda(x, y) = d_2(x, y), \ \forall\lambda \in D_2.$$

Prenons $k(\lambda) = 1, \ \forall\lambda \in D_1$ et $k(\lambda) = 1, \ \forall\lambda \in D_2$, alors on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.1. *Soient (E, d_1) et (F, d_2) deux espaces métriques complets. Soient $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $T : E \longrightarrow E$ des applications, $v : E \longrightarrow R$ une application de graphe séquentiellement fermé et $\varphi : F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application telles que :*

(1) $d_1(x, Tx) + d_2(v(x), v(Tx)) \leq \phi(Tx) - \phi(x) + \psi(v(Tx)) - \psi(v(x))$, $\forall x \in E$,

(2) *T est surjective de graphe fermé,*

Alors, T possède un point fixe.

Corollaire 3.2. *Soit (E, θ_1) (resp., (F, θ_2))un espace vectoriel topologique séparé et séquentiellement complet tel que la famille $\{U_\lambda, \lambda \in D_1\}$ (resp., $\{U_\mu, \mu \in D_2\}$) est une base de voisinages équilibrés de 0 dans E (resp., dans F). Soit $v : E \longrightarrow F$ une application de graphe séquentiellement fermé. Soient $k_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $k_2 : F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ des applications décroissantes. Soit $T : E \longrightarrow E$ une application. Supposons qu'il existe deux applications $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $\psi : F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que :*

(1) *Pour tout $x \in X$,*

$$\begin{cases} \alpha(x) & = \phi(Tx) - \phi(x) \geq 0, \\ \beta(x) & = \psi(v(Tx)) - \psi(v(x)) \geq 0 \end{cases}$$

(2) *Pour tous $x \in X$ et $(\lambda, \mu) \in D_1 \times D_2$*

$$\begin{cases} x - Tx \in k_1(\lambda)\alpha(x)U_\lambda \\ v(x) - v(Tx) \in k_2(\mu)\beta(v(x))U_\mu \end{cases}$$

(3) *T est surjective de graphe séquentiellement fermé,*

Alors, T possède un point fixe.

Références

[1] Caristi, J., Fixed point theorems for mapping satisfying inwardness conditions, *Trans. Amer. Math. Soc,* **215** (1976), 241 – 251.

[2] Caristi, J., Fixed point theory and inwardness conditions, *Applied Nonlinear Analysis* (1979), 179 – 183.

[3] Shi-Sheng, Z., Yu-Qing, C., Jin-Li, G., Ekeland's variational principle and Caristi's fixed point theorem inprobabilistic metric space, *Acta Math. Appl. Sinica,* **7** (1991), 217 – 228.

[4] Xuan-Fang, J., The variational principle and fixed point theorems in certain topological spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **202** (1996), 398 – 412.