EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **16**, Núm. 3, 435 – 440 (2001)

Sur les Topologies de Lebesgue

Belmesnaoui Aqzzouz, Redouane Nouira

Université Ibn Tofaïl, Faculté des sciences, Département de Mathématiques, B.P. 133, *Kénitra, Maroc (Morocco)*

e-mail: baqzzouz@hotmail.com

(Research paper presented by J.P. Moreno)

AMS *Subject Class.* (2000): 46A40, 46B40, 46B42 *Received May* 23, 2001

1. Introduction et rappels

On montre que si (E, τ) est un treillis localement convexe-solide séparé et si la topologie τ est de Lebesgue, alors pour toute topologie localement convexe-solide séparée υ sur E telle que $\upsilon \leq \tau$, on a $\upsilon = \tau$ sur les parties bornées pour l'ordre, c'est équivalent aussi à dire que, E est dense pour l'ordre dans $\hat{E}$ et la topologie $\hat{\tau}$ est de Lebesgue, où $(\hat{E}, \hat{\tau})$ est le complété topologique de (E, τ). On obtient ainsi un résultat analogue à celui établit par Si Kit Chung et Denney Leug [3] pour les normes o-continues sur les treillis de Banach. Enfin, on preuve que, si (E, τ) est un treillis localement convexe-solide séparé avec $E^{'}$ discret et si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille disjointe compléte dans E', alors, la topologie τ est de Lebesque, si et seulement si, $\forall i \in I,\ C_{f_i} \cap E \neq \{0\}$. On déduit en particulier ; que si (E, τ) est complet alors la topologie τ est de Lebesgue.

Pour établir ces résultats, on a besoin de quelques rappels.

Un treillis vectoriel est un espace vectoriel ordonné E tel que $\sup(x, y)$ existe pour tous $x, y \in E$. A chaque élément $x \in E$, on associe sa valeur absolue $|x| = \sup(x, -x)$, sa partie positive $x^+ = \sup(x, 0)$ et sa partie négative $x^- = (-x)^+$. Une partie A du treillis vectoriel E est dite solide si $x \in A$, $y \in E$ et $|y| \leq |x|$ impliquent $y \in A$. La partie A admet un supremum $v \in E$; si $\forall u \in A$; $u \leq v$ et si $w \in E$ tel que $\forall u \in A$, $u \leq w$ alors $v \leq w$. Une bande dans E est un sous-espace vectoriel solide B de E tel que $\sup A \in B$ pour toute partie non vide A de B, admettant un supermum dans E. Un treillis vectoriel E est complet pour l'ordre si toute partie non vide majorée de E admet un supremum.

Un élément u non nul du treillis vectoriel E est dit discret si l'idéal engendré par u coincide avec le sous-espace vectoriel engendré par u. Le treillis vectoriel E est dit discret, s'il admet un système disjoint complet d'éléments discrets $(e_i)_{i\in I}$ (i.e. pour tout $i,j \in I$, $e_i \wedge e_j = 0$, et si pour un $u \in E$; on a $u \wedge e_i = 0$, $\forall i \in I$, alors $u = 0$).

Une topologie vectorielle τ sur un treillis vectoriel E est dite localement solide si les voisinages solides de 0 forment un système fondamental des voisinages de 0. Elle est dite localement convexe-solide si elle est à la fois localement convexe et localement solide.

Une semi-norme p sur un treillis vectoriel est dite de treillis si $x, y \in E$ et $|x| \leq |y|$ impliquent $p(x) \leq p(y)$. Une topologie localement solide τ sur E est dite de Lebesgue (respectivement σ-Lebesgue ; pré-Lebesgue) si $x_\alpha \downarrow 0$ (respectivement $x_n \downarrow 0$; $0 \leq x_n \uparrow\leq x$) dans E implique $x_\alpha \longrightarrow 0$ (respectivement $x_n \longrightarrow 0$; (x_n) est τ-Cauchy).

Si (E,τ) est un treillis vectoriel localement convexe-solide et E' son dual topologique, on note par $|\sigma|(E,E')$ la topologie faible absolue définie sur E par la famille des semi-normes de treillis $\{P_f : f \in E'\}$, où $P_f(x) = |f|(|x|)$. On définie de la même manière la topologie $|\sigma|(E',E)$ sur $E^{'}$. Pour toute la terminologie concernant les treillis vectoriel localement-convexe-solide nous suiverons la référence [1].

2. Résultats

Théorème 2.1. *Soient τ_1 et τ_2 deux topologies localement convexe-solides séparées et de Lebesgue sur E. Alors τ_1 et τ_2 (respectivement $|\sigma|(E_1,E_1')$ et $|\sigma|(E_2,E_2')$) coincident sur les intervalles d'ordre, où $E_i = (E,\tau_i)$ et E_i' est le dual topologique de $E_i (i = 1,2)$.*

Preuve. (a) Supposons d'abord que E est complet pour l'ordre et τ_2 est moins fine que τ_1. Soit $x \in E^+$, l'application identité de $[0,x]$, $id_{[0,x]}$: $([0,x],\sigma_1) \longrightarrow ([0,x],\sigma_2)$ est continue, où $\sigma_i = \sigma(E_i,E_i')$ est la topologie faible de E_i et $E_i = (E,\tau_i)$, $i = 1,2$. D'aprés le théorème 21.1 de ([1, p. 147]), $[0,x]$ est σ_1-compact et donc l'application $id_{[0,x]}$ est bicontinue. Par conséquent $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $[0,x]$ et donc $|\sigma|(E_1,E_1') = |\sigma|(E_2,E_2')$ sur $[0,x]$. Il résulte du théorème 19,18 de ([1, p. 132]) que $\tau_i = |\sigma|(E_i,E_i')$ sur $[0,x]$, et par suite $\tau_1 = \tau_2$ sur $[0,x]$.

(b) Supposons E est complet pour l'ordre mais sans supposer que $\tau_2 \leq \tau_1$. Soit $(p_{ij})_{i\in I_j}$ une famille de semi-normes de treillis qui engendrent la topologie τ_j $(j = 1,2)$. Soit τ la topologie engendrée par la famille des semi-normes $(p_{i1} + p_{i2})_i$. La topologie τ est localement convexe-solide et de plus elle est de Lebesgue. Vu que $\tau_j \leq \tau$, alors $\tau_j = \tau$ (respectivement $\sigma_j = \sigma$) sur $[0, x]$, où $\sigma_j = \sigma(E_j, E'_j)$ avec $E_j = (E, \tau_j)$ $(j = 1, 2)$ et $\sigma = \sigma((E, \tau), (E, \tau)')$ la topologie faible définie par τ. Par conséquent $\tau_1 = \tau_2$ (respectivement $\sigma_1 = \sigma_2$) sur $[0, x]$.

(c) Si E n'est pas complet pour l'ordre. Soit $\tilde{E}$ son complété pour l'ordre. Il existe sur $\tilde{E}$ une unique topologie $\tilde{\tau}_i$ localement convexe-solide séparée et de Lebesgue prolongeant τ_i (voir [1, théorème 11.10, p. 82]). Donc $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2$ (respectivement $\sigma(\tilde{E}_1, \tilde{E}'_1) = \sigma(\tilde{E}_2, \tilde{E}'_2)$) sur $[0, x]$. Par suite, $\tau_1 = \tau_2$ et $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $[0, x]$. ∎

Remarque 2.2. Si la topologie τ_2 est seulement $\sigma-$Lebesgue, alors le théorème ci-dessus n'est plus vrai : En effet ; si E est l'espace des fonctions réelles mesurables définies sur $[0, 1]$ tel que $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty$. Considérons le système de voisinages de 0 définie par :

$$W_{F,n,\varepsilon} = \{f \in E : \int_0^1 |f(x)|^2 < n^{-1} \text{ et } |f(x)| < \varepsilon \text{ pour tout } x \in F\}$$

où F parcourt les parties finies de $[0, 1]$. Ce système définie une topologie localement convexe-solide séparée et $\sigma-$Lebesgue mais n'est pas de Lebesgue ([1, Exemple 8.6, p. 55]). Cette topologie ne coïncide pas avec la topologie de la convergence simple sur les bornés pour l'ordre, qui est une topologie de Lebesgue.

Proposition 2.3. *Soit $(E, \|.\|)$ un treillis de Banach de norme o-continue. Alors toutes les topologies localement covexe-solides séparées sur E sont de Lebesgue, par suite coïcident sur les bornés pour l'ordre.*

Preuve. Si τ est une topologie localement convexe-solide séparée sur E, alors $E'_2 = (E, \tau)' \subset (E, \|.\|)' = E'_1$. Or $(E, |\sigma|(E, E'_1))$ est de Lebesgue (voir [1, théorème 11.7, p. 81]), donc $(E, |\sigma|(E, E'_2))$ et par suite (E, τ) est de Lebesgue. ∎

En conséquences, toutes les topologies localement convexes-solides séparées sur les espaces l^p, L^p $(1 \leq p < \infty)$, et sur les espaces de Hilbert sont de Lebesgue.

Théorème 2.4. *Soit (E, τ) un espace localement convexe-solide séparé. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La topologie τ est de Lebesgue.*

(2) *Pour toute topologie localement convexe-solide séparée* υ *sur* E *telle que* $\upsilon \leq \tau$, *on a* $\upsilon = \tau$ *sur les parties bornées pour l'ordre.*

(3) E *est dense pour l'ordre dans* $\hat{E}$ *et la topologie* $\hat{\tau}$ *est de Lebesgue, où* $(\hat{E}, \hat{\tau})$ *est le complété topologique de* (E, τ).

Preuve. (1) $\Longrightarrow$ (2) D'aprés le théorème 2.1.

(3) $\Longrightarrow$ (1) évident.

(2) $\Longrightarrow$ (3) En prenant $\upsilon = |\sigma|(E, E')$ qui est pré-Lebesgue, on déduit que τ est pré-Lebesgue et donc la topologie $\hat{\tau}$ est de Lebesgue.

Supposons qu'il existe $\hat{x} \in \hat{E}^+$ avec $\hat{x} \neq 0$ tel que $[0, \hat{x}] \cap E = \{0\}$. On peut donc supposer l'existence d'un $y \in E$ tel que $\hat{x} < y$. Soit $f_0 \in (E')^+$ tel que $f_0(\hat{x}) \neq 0$. D'aprés le théorème 90.9 de ([4, p. 182]), on a

$$\hat{E} = N_{f_0} \oplus C_{f_0}$$

où

$$N_{f_0} = \{x \in \hat{E} : f_0(|x|) = 0\}$$

et

$$C_{f_0} = \{y \in \hat{E} \ : \ \forall x \in N_{f_0}, \ \inf(|x|, |y|) = 0\}$$

Donc $\hat{x}$ s'écrit sous la forme $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_0$ avec $\hat{x}_1 \in N_{f_0}$ et $\hat{x}_0 \in C_{f_0}$, et par suite $f_0(\hat{x}_0) \neq 0$.

Considérons la semi-norme P_{f_0} définie par f_0, elle est strictement positive sur C_{f_0}, et donc sur $B_{\hat{x}_0}$, où $B_{\hat{x}_0}$ est la bande principale engendrée par $\hat{x}_0$.

Si $B_{\hat{x}_0} \cap E = \{0\}$. soit $\mathcal{A} = \{g \in E' : g(\hat{x}_0) = 0\}$. $\mathcal{A}$ sépare les points de E, et donc induit une topologie localement convexe-solide séparé υ sur E telle que $\upsilon \leq \tau$. Or il existe une suite $(x_i)_i \subset E^+$ tel que $x_i \xrightarrow{\tau} \hat{x}_0$, et par suite $x_i \wedge y \xrightarrow{\tau} \hat{x}_0$. Comme $x_i \wedge y \xrightarrow{\upsilon} 0$ on a $x_i \wedge y \xrightarrow{\tau} 0$, et donc $\hat{x}_0 = 0$. D'où la contradiction.

S'il existe $y_1 \in B_{\hat{x}_0} \cap E$ avec $y_1 \neq 0$. Posons $y_1 \wedge \hat{x}_0 = \hat{x}_2 \neq 0$. On a alors $\hat{x}_2 \in B_{y_1} \subset B_{\hat{x}_0}$, et donc (B_{y_1}, P_{f_0}) est un treillis vectoriel normé. D'après le théorème 1.b.14 de [2], le complété topologique $(\hat{B}_{y_1}, \hat{P}_{f_1})$ de $(B_{y_1}, P_{f_0}))$ peut être représenté par un idéal d'un espace de type $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, où $(\Omega, \sum, \mu)$ est un espace de probabilité, avec y_1 la fonction constante 1.

On a $\hat{E} = B_{y_1} \oplus B_{y_1}^{\perp}$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < 1$ et $A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega : \hat{x}_2(\omega) < \varepsilon\}$.

Pour $h \in B_{y_1}$ et $g \in B_{y_1}^{\perp}$, posons

$$q_{A_\varepsilon}(h + g) = \max\left\{ \|\chi_{A_\varepsilon}\|_{B'_{y_1}} + 1 \int_{A_\varepsilon} |h| d\mu, \ q(g) \right\}$$

où q décrit les semi-normes qui définissent la topologie $\hat{\tau}$ de $\hat{E}$, $\chi_{A_\varepsilon}(h) = \int_{A_\varepsilon} h d\mu$, et B'_{y_1} est le dual topologique de B_{y_1}.

La famille des semi-normes définie par q_{A_ε} sépare les point de E. En effet ; si $q_{A_\varepsilon}(h+g) = 0$ pour tout q et ε, alors $g = 0$ et $h = 0$ μ-presque partout sur A. Par suite, $h \in E \cap B_{y_1}$ et $\varepsilon(h \wedge y_1) < \hat{x}_2$, et donc $h \wedge y_1 = 0$, c'est-à-dire que $h = 0$.

D'autre part ; on a $0 \leq \chi_{\Omega \setminus A} \leq y_1$, donc $\chi_{\Omega\setminus A} \in \hat{B}_{y_1}$. Par conséquent ; il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_{y_1}$ telle que $(y_n)_n$ converge vers $\chi_{\Omega\setminus A}$ dans $\hat{B}_{y_1}$ (on peut supposer $(y_n)_n \subset B_{y_1}$).

Posons $h_n = y_n \wedge y$; on a $h_n \longrightarrow \chi_{\Omega\setminus A}$ pour la norme $\hat{P}_{f_0}$ i.e. $h_n - \chi_{\Omega\setminus A} \longrightarrow 0$ pour la norme $\hat{P}_{f_0}$. Il en résulte que $q_{A_\varepsilon}(h_n) \longrightarrow 0$ et par suite $\chi_{\Omega\setminus A} = 0$. Par conséquent ; $\hat{x}_2 = 0$ μ-presque partout sur A_ε et donc $\hat{x}_2 = 0$. Ce qui présente une contradiction. ∎

Proposition 2.5. *Soit* (E, τ) *un treillis localement convexe-solide séparé tel que* E' *est discret. Si* $(f_i)_{i\in I}$ *est une famille disjointe compléte dans* E', *alors on a l'équivalence suivante :*

(1) τ *est de Lebesque.*

(2) $\forall i \in I,\ C_{f_i} \cap E \neq \{0\}$.

En particulier ; si (E, τ) *est complet alors la topologie* τ *est de Lebesgue.*

Preuve. (2) $\Rightarrow$ (1) Il suffit de montrer que $|\sigma|(E, E')$ est de Lebesgue. Soit υ une topologie localement convexe-solide séparée telle que $\upsilon \leq |\sigma|(E, E')$.

Posons $E_1 = (E, \upsilon)$, alors $E'_1 \subset E'$. Soit P_i la projection de E'_1 sur B_{f_i}. Supposons qu'il existe $i \in I$ tel que $P_i(g) = 0$ pour tout $g \in E'_1$. Soit $x \in C_{f_i} \cap E$ avec $x \neq 0$. Puisque $g \wedge f_i = 0$ on a $C_{f_i} \subset N_g$, et donc $g(x) = 0$, ce qui montre que E'_1 ne sépare pas les points de E. Par conséquent ; pour tout $i \in I$, il existe $f \in E'_1$ tel que $P_i(f) \neq 0$, et donc $f_i \in E'_1$. Par suite $(f_i)_{i\in I} \subset E'_1$.

Soit maintenant $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ une suite généralisée bornée pour l'ordre, positive et majorée par un certain $x \in E$ telle que $x_\alpha \xrightarrow{\upsilon} 0$. Alors $f_i(x_\alpha) \longrightarrow 0$, pour tout $i \in I$.

Soit $f \in (E')^+$. Si $P_i(f) = t_i f_i$, alors $f = \sup_i\{t_i f_i\}$ et donc $\sum_{i\in F} t_i f_i(x) < f(x)$; $\forall F \subset I$ avec F fini. Soit $\varepsilon > 0$; $\exists F_0 \subset I$ fini tel que $\forall G \subset I$ fini avec $F_0 \cap G = \emptyset$. On a

$$\sum_{i\in G} t_i f_i(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Or $\exists \alpha_0$ tel que $\alpha > \alpha_0$ implique $t_i f_i(x_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2n}$, $\forall i \in F_0$ (n =cardF_0). Par suite, on a $(\sum_{i\in F_0} t_i f_i(x_\alpha)) + (\sum_{i\in G} t_i f_i(x_\alpha)) < \varepsilon$, et donc $f(x_\alpha) < \varepsilon$.

Par conséquent, la suite $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ converge vers 0 pour la topologie $|\sigma|(E,E')$, et donc υ et $|\sigma|(E,E')$ coïncident sur les bornés pour l'ordre. Par suite $|\sigma|(E,E')$ est de Lebesgue.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $C_{f_{i_0}} \cap E = \{0\}$. Posons $\mathcal{A}=\{g \in E' \ : \forall x \in C_{f_{i_0}},\ g(x)=0\}$. On peut montrer que $\mathcal{A}$ définie bien une topologie localement convexe-solide séparée υ sur E avec $\upsilon \leq \tau$. Soit $x \in C_{f_{i_0}}$ avec $x \neq 0$, il existe donc une suite généralisée $(x_j)_{j\in J} \subset E$ qui converge vers x dans $(\hat{E},\hat{\tau})$. Or $(x_j)_{j\in J}$ converge vers 0 dans (E,υ) et ne converge pas dans (E,τ). ∎

Références

[1] Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., "Locally solid Riesz spaces", Academic Press, New York, London, 1978.

[2] Meyer-Nieberg, P., "Banach Lattices", Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] Chung, S.K., Leung, D., On order continuous norms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128,** (2000), 1971 – 1974.

[4] Zaanen, A.C., "Riesz spaces II", North-Holland, Amsterdam, 1983.