EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **15**, Núm. 3, 531 – 545 (2000)

Radio de Estabilidad Real de Sistemas Bidimensionales para Perturbaciones Lineales Dependientes del Tiempo

Rosa Urquiza Salgado, Henry González Mastrapa

Universidad Pedagógica de Holguín, Departamento de Matemática y Computación, Avda. de los Libertadores y Circunvalación, Holguín, C.P. 81000, *Cuba*
Universidad de Oriente, Departamento de Matemática, C/ Patricio Lumumba s/n, Santiago de Cuba, C.P. 90500 *Cuba*
e-mail: rurquiza@uho.hlg.edu.cu, henry@csd.uo.edu.cu

(Research paper presented by Jaume Llibre)

AMS *Subject Class.* (1991): 34K20 *Received May* 30, 1998

1. Introducción

En la solución de muchos problemas de Control Automático y otras aplicaciones se usan como modelos sistemas dinámicos lineales, los cuales contienen parámetros con incertidumbre, es decir, que sobre ellos se tiene información incompleta. La incertidumbre surge cuando el modelo "real"es aproximado mediante un modelo menos complejo pero accesible a la investigación. Aparece así la necesidad de fijar un modelo como nominal, de manera que el modelo "real"represente una perturbación de aquel.

Para las aplicaciones es importante asegurar la estabilidad asintótica no sólo del modelo nominal sino también de sus perturbaciones. Surge así, de manera natural, el problema de buscar la cota máxima $r > 0$ tal que la estabilidad se conserve para todas las perturbaciones de norma estrictamente menor que r en un espacio dado de perturbaciones. Esta cota máxima es llamada *radio de estabilidad*. El problema sobre la búsqueda del radio de estabilidad resulta equivalente al problema de hallar el mínimo de las normas de las perturbaciones desestabilizadoras.

El concepto de radio de estabilidad fue introducido en los trabajos [6], [7] por los autores D. Hinrichsen y A.J. Pritchard. Allí se da este concepto para una matriz A estable sometida a distintas clases de perturbaciones.

Resultados bastante completos han sido obtenidos en los últimos años para el cálculo del radio de estabilidad en el caso de perturbaciones complejas y también reales no dependientes del tiempo. El cálculo del radio de estabilidad para perturbaciones dependientes del tiempo presenta mayores dificultades, y aunque hay resultados al respecto todavía desde el punto de vista práctico no resuelven completamente el problema. En el presente trabajo se investiga este radio en el caso de sistemas bidimensionales. Pasemos al planteamiento del problema.

Sea $\dot{x} = Ax$ el sistema nominal, donde la matriz A es estable según Hurwitz, lo cual significa que el sistema es asintóticamente estable (a.e.); es decir, $Re\lambda < 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, $\sigma(A)$ es el espectro de A. Sean dadas las matrices $B \in \Re^{2\times l}$, $B \neq 0$ y $C \in \Re^{q\times 2}$, $C \neq 0$, $l, q \in \{1,2\}$. Consideremos los siguientes sistemas perturbados:

$$\Sigma_\Delta : \dot{x} = [A + B\Delta C]x, \quad \Delta \in \Re^{l\times q},$$
$$\Sigma_{\Delta(t)} : \dot{x} = [A + B\Delta(t)C]x, \quad \Delta(\cdot) = (\delta_{ij}(\cdot))_{i,j=1,2} \in L^\infty\left(\Re_+, \Re^{l\times q}\right).$$

Se toma como norma de la perturbación en cada caso:

$$\|\Delta\| = \sqrt{tr(\Delta^T\Delta)},$$
$$\|\Delta(\cdot)\|_\infty = ess \sup_{t\in\Re_+} \|\Delta(t)\|.$$

Siguiendo [6], [7] definamos los siguientes conceptos de radio de estabilidad:

Definición 1.1. Llamaremos radio de estabilidad real de la matriz A para perturbaciones lineales de estructura (B, C) no dependientes del tiempo al número:

$$r_\Re^-(A,B,C) = \inf\{\|\Delta\| : \Delta \in \Re^{l\times q},\ \sigma(A + B\Delta C) \cap C_+ \neq \emptyset\},$$

donde $C_+ = \{\lambda \in C : Re\lambda \geq 0\}$.

Definición 1.2. Llamaremos radio de estabilidad real de la matriz A para perturbaciones lineales de estructura (B, C) dependientes del tiempo al número:

$$r_{\Re,t}^-(A,B,C) = \inf\{\|\Delta(\cdot)\|_\infty : \Delta(\cdot) \in L^\infty\left(\Re_+, \Re^{l\times q}\right) \text{ y } \Sigma_{\Delta(t)} \text{ no es a.e.}\}.$$

Notemos que, a diferencia del trabajo [6], aquí se toma como norma de matrices la norma de Frobenius $\|\cdot\|$ en lugar de una norma operacional.

En el trabajo [8] se expone un método general para el cálculo del número $r_{\Re}^{-}(A,B,C)$, $(A,B,C) \in \Re^{n\times n} \times \Re^{n\times l} \times \Re^{q\times n}$, tomando como norma de una matriz su mayor valor singular. Sin embargo, no conocemos un método general para el cálculo de $r_{\Re,t}^{-}(A,B,C)$. Resultados interesantes relativos a este problema se encuentran en [2], [3] y [5].

El radio de estabilidad $r_{\Re,t}^{-}(A,B,C)$ para los tríos $(A,B,C) \in \left(\Re^{2\times 2}\right)^3$ se aborda en el trabajo [3], donde se argumenta un método para su cálculo, basado en el análisis de la estabilidad de los *sistemas extremales de Barabánov* dependientes de un parámetro r asociado al trío. Sin embargo, allí no se dan las expresiones explícitas de los sistemas extremales, por lo que no se puede realizar el análisis general de la estabilidad de éstos. En el presente trabajo se da respuesta a esas interrogantes, lo que permite desarrollar un método general y efectivo para la determinación del radio de estabilidad.

El trabajo se organiza del siguiente modo. En la próxima sección se fundamenta la reducción de los tríos (A,B,C) considerados en el trabajo al caso en que estas tres matrices son cuadradas de orden 2. En la sección 3 se expone una fórmula para el cálculo del radio de estabilidad no dependiente del tiempo $r_{\Re}^{-}(A,B,C)$. En la sección 4 se expone un resultado que relaciona el radio de estabilidad buscado $r_{\Re,t}^{-}(A,B,C)$ con dos familias monoparamétricas de sistemas homogéneos de ecuaciones diferenciales a los que se ha dado el nombre de sistemas extremales de Barabánov y se obtienen las expresiones de estos sistemas de manera explícita en términos de los datos. La sección 5 está dedicada al problema de la determinación de los valores $r \in (0, r_{\Re}^{-}(A,B,C))$ para los cuales ambos sistemas auxiliares de Barabánov son asintóticamente estables. Estos resultados se emplean para fundamentar en la sección 6 el teorema principal de este trabajo, el que da un método algorítmico para el cálculo del radio de estabilidad buscado. Por último, en la sección 7 se presenta un ejemplo, donde se aplica el método obtenido al cálculo del radio de estabilidad $r_{\Re,t}^{-}(A,B,C)$ para un trío (A,B,C) concreto.

2. Reducción al caso $(A,B,C) \in \left(\Re^{2\times 2}\right)^3$

Para las perturbaciones $P = B\Delta C$, $B \in \Re^{2\times l}$, $C \in \Re^{q\times 2}$, $l,q \in \{1,2\}$, se consideran las siguientes posibilidades:

(a) $l=1$, $q=1$, (b) $l=1$, $q=2$, (c) $l=2$, $q=1$, (d) $l=2$, $q=2$.

A cada par (B,C) correspondiente a los casos (a), (b) y (c) asociemos un par $(\widetilde{B},\widetilde{C})$ correspondiente al caso (d):

$$\text{(a) } \widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{C} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b) } \widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{C} = C,$$
$$\text{(c) } \widetilde{B} = B,\ \widetilde{C} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A las matrices Δ, cuyas formas respectivas son:

$$\Delta = \delta_{11}, \quad \Delta = (\delta_{11},\, \delta_{12})\,, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \end{pmatrix},$$

asociemos la matriz

$$\widetilde{\Delta} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}.$$

Entonces, un simple cálculo muestra que en todos los casos se cumple la igualdad $P = B\Delta C = \widetilde{B}\widetilde{\Delta}\widetilde{C}$. Todo lo expuesto justifica que en lo que sigue sólo consideremos los tríos $(A, B, C) \in \left(\Re^{2\times 2}\right)^3$, pues de las definiciones 1.1 y 1.2 y la igualdad anterior se deduce directamente que

$$r_{\Re}^{-}(A, B, C) = r_{\Re}^{-}(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}),$$
$$r_{\Re,\,t}^{-}(A, B, C) = r_{\Re,\,t}^{-}(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}),$$

3. Expresiones para $r_{\Re}^{-}(A, B, C)$

Es evidente que de las definiciones 1.1 y 1.2 se tiene $r_{\Re,\,t}^{-}(A, B, C) \leq r_{\Re}^{-}(A, B, C)$. El número $r_{\Re}^{-}(A, B, C)$, quien juega un importante papel en este trabajo, fue calculado en [3], donde se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Para cada $(A, B, C) \in \left(\Re^{2\times 2}\right)^3$, donde A es una matriz estable, $B \neq 0$, $C \neq 0$, el número $r_{\Re}^{-}(A, B, C)$ es el menor de los números*

$$r_1(A, B, C) = \begin{cases} +\infty & \textit{si } \ CB = 0, \\ -\operatorname{tr} A\big(\|CB\|\big)^{-1} & \textit{si } \ CB \neq 0, \end{cases}$$

$$r_2(A, B, C) = \begin{cases} +\infty & \textit{si } \ \det(BC) = 0,\ E = 0, \\ \det A\big(\|E\|\big)^{-1} & \textit{si } \ \det(BC) \neq 0,\ E \neq 0, \\ \dfrac{\sqrt{\|E\|^2 - \sqrt{\|E\|^4 - 4\det^2 E}}}{\sqrt{2}\,|\det(BC)|} & \textit{si } \ \det(BC) \neq 0, \end{cases}$$

donde

$$E^T = CD, \quad D = \begin{pmatrix} -\det\bigl(A_{\star 2},\, B_{\star 1}\bigr) & -\det\bigl(A_{\star 2},\, B_{\star 2}\bigr) \\ \det\bigl(A_{\star 1},\, B_{\star 1}\bigr) & \det\bigl(A_{\star 1},\, B_{\star 2}\bigr) \end{pmatrix}$$

y $\bigl(A_{\star i},\, B_{\star j}\bigr)$ *denota a la matriz cuadrada de segundo orden cuyas primera y segunda columnas son la* i *-ésima columna de la matriz* A *y la* j *-ésima columna de la matriz* B*, respectivamente.*

4. Sistemas extremales de Barabánov

Sea $(A, B, C) \in \bigl(\Re^{2\times 2}\bigr)^3$, A matriz estable, B y C matrices no nulas. Para cada $r \in (0,\, r_{\Re}^{-}(A, B, C))$ y cada $x = (x_1, x_2) \in \Re^2$ definamos los conjuntos de puntos de $\Re^2$

$$F_r(x) = \{[A + B\Delta C]x :\, \Delta \in \Re^{2\times 2},\, \|\Delta\| \le r\}, \tag{1}$$

$$F_r^+(x) = \{f = (f_1, f_2)^T \in F_r(x) :\, x_2 f_1 - x_1 f_2 < 0\}, \tag{2}$$

$$F_r^-(x) = \{f = (f_1, f_2)^T \in F_r(x) :\, x_2 f_1 - x_1 f_2 > 0\}, \tag{3}$$

$$D_r^+ = \{x \in \Re^2 :\, x_2 f_1 - x_1 f_2 < 0,\ f = (f_1, f_2)^T \in F_r(x)\}, \tag{4}$$

$$D_r^- = \{x \in \Re^2 :\, x_2 f_1 - x_1 f_2 > 0,\ f = (f_1, f_2)^T \in F_r(x)\}, \tag{5}$$

y consideremos sobre las regiones D_r^+ y D_r^- los sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f_r^+(x), \quad x \in D_r^+, \tag{6}$$

$$\dot{x} = f_r^-(x), \quad x \in D_r^-, \tag{7}$$

donde las aplicaciones $f_r^+(x)$ y $f_r^-(x)$ se dan por las expresiones

$$f_r^+(x) = \arg \max_{f \in F_r^+(x)} \frac{\langle f,\, x\rangle}{\|f\|}, \tag{8}$$

$$f_r^-(x) = \arg \max_{f \in F_r^-(x)} \frac{\langle f,\, x\rangle}{\|f\|}. \tag{9}$$

Notemos que los problemas extremales (8) y (9) poseen solución, ya que si se cambian los conjuntos $F_r^+(x)$ y $F_r^-(x)$ por sus clausuras por razones de compacidad del conjunto restricción y continuidad de la función objetivo existe solución, pero ésta, por el significado de la función objetivo, no se alcanza en los puntos que se añaden para obtener la frontera.

Los sistemas (6) y (7) son precisamente los sistemas extremales de Barabánov asociados al trío (A, B, C) introducidos en el trabajo [3], donde se demuestra a partir del Teorema de Barabánov [1] el siguiente resultado:

TEOREMA 4.1. *Para cada* $(A, B, C) \in \left(\Re^{2\times 2}\right)^3$, *donde* A *es una matriz estable,* $B \neq 0$, $C \neq 0$, *se tiene que*

$$r^-_{\Re,t}(A,B,C) = \inf\{r \in (0, r^-_{\Re}(A,B,C) : \text{ uno de los sistemas } (6) \text{ ó } (7) \text{ no es a.e.}\}.$$

En lo que sigue los símbolos $M_{i\star}$, $M_{\star i}$ y m_{ij} denotarán respectivamente la i-ésima fila, la i-ésima columna y el ij-ésimo elemento de la matriz M.

Pasemos a determinar las expresiones explícitas de los sistemas extremales de Barabánov. Haremos los cálculos para el caso $\det B \neq 0$, $C_{1\star} \neq 0$, aunque es posible verificar sin mayores dificultades que las expresiones obtenidas son válidas en general.

Sean $x \in \Re^2$, $x \neq 0$, $r \in (0, r^-_{\Re}(A,B,C))$. De la expresión (1) se tiene que si $f = (f_1, f_2) \in F_r(x)$, entonces

$$f_1 = A_{1\star}x + (b_{11}\delta_{11} + b_{12}\delta_{21})C_{1\star}x + (b_{11}\delta_{12} + b_{12}\delta_{22})C_{2\star}x, \tag{10}$$

$$f_2 = A_{2\star}x + (b_{21}\delta_{11} + b_{22}\delta_{21})C_{1\star}x + (b_{21}\delta_{12} + b_{22}\delta_{22})C_{2\star}x. \tag{11}$$

La función auxiliar de Lagrange de los problemas (8) y (9) es

$$L(\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}) = \lambda_0 \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} + \lambda(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2 + \delta_{21}^2 + \delta_{22}^2 - r^2).$$

Si en el punto $(\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22})$ se alcanza el extremo, entonces existen números λ_0 y λ, no nulos simultáneamente, de manera que se satisfacen las condiciones (a) - (c):

$$\text{(a)} \begin{cases} \lambda_0 \dfrac{C_{1\star}x(x_2 f_1 - x_1 f_2)}{\left(f_1^2 + f_2^2\right)^{3/2}}(b_{21}f_1 - b_{11}f_2) + 2\lambda\delta_{11} = 0, \\ \lambda_0 \dfrac{C_{2\star}x(x_2 f_1 - x_1 f_2)}{\left(f_1^2 + f_2^2\right)^{3/2}}(b_{21}f_1 - b_{11}f_2) + 2\lambda\delta_{12} = 0, \\ \lambda_0 \dfrac{C_{1\star}x(x_2 f_1 - x_1 f_2)}{\left(f_1^2 + f_2^2\right)^{3/2}}(b_{22}f_1 - b_{12}f_2) + 2\lambda\delta_{21} = 0, \\ \lambda_0 \dfrac{C_{2\star}x(x_2 f_1 - x_1 f_2)}{\left(f_1^2 + f_2^2\right)^{3/2}}(b_{22}f_1 - b_{12}f_2) + 2\lambda\delta_{22} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

(b) $\lambda(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2 + \delta_{21}^2 + \delta_{22}^2 - r^2) = 0$,

(c) $\lambda_0 \leq 0, \ \lambda \geq 0$.

Veamos que $\lambda_0 \neq 0$. En efecto, si $\lambda_0 = 0$ entonces según (12) es $\Delta = 0$, y si este punto fuese solución del problema extremal entonces la derivada de $\langle f, x\rangle/\|f\|$ respecto a cada δ_{ij}, $i, j = 1, 2$, en $\Delta = 0$ sería nula, de donde

$$\begin{pmatrix} b_{21} & -b_{11} \\ b_{22} & -b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1\star}x \\ A_{2\star}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & -b_{11} \\ b_{22} & -b_{12} \end{pmatrix} Ax = 0,$$

y ello no es posible, ya que $\det A \det B \neq 0$. Tampoco puede ser $\lambda = 0$, pues entonces de (12) se deduce que

$$\begin{pmatrix} b_{21} & -b_{11} \\ b_{22} & -b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0,$$

pero $\det B \neq 0$, y $f = (A + B\Delta C)x \neq 0$, pues $\|\Delta\| \leq r$ y $r \in (0, r_{\Re}^{-}(A, B, C))$. Luego, podemos suponer que $\lambda_0 < 0$ y $\lambda > 0$, y así según b) la matriz Δ que proporciona el extremo de cualquiera de los problemas (8), (9) satisface la igualdad

$$\|\Delta\|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \delta_{ij}^2 = r^2. \tag{13}$$

Por otra parte, del sistema (12) se obtiene directamente que

$$\delta_{12} = \frac{C_{2\star}x}{C_{1\star}x}\delta_{11}, \quad \delta_{22} = \frac{C_{2\star}x}{C_{1\star}x}\delta_{21}. \tag{14}$$

Mediante cálculo resulta que

$$\begin{aligned} b_{21}f_1 - b_{11}f_2 &= A_{1\star}xb_{21} - A_{2\star}xb_{11} - \det B(C_{1\star}x\delta_{21} + C_{2\star}x\delta_{22}), \\ b_{22}f_1 - b_{12}f_2 &= A_{1\star}xb_{21} - A_{2\star}xb_{12} + \det B(C_{1\star}x\delta_{11} + C_{2\star}x\delta_{12}), \end{aligned}$$

y poniendo estas expresiones en la primera y la tercera ecuación de (12) obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \Lambda\delta_{11} - \beta(x)\delta_{21} + \gamma_1(x) = 0, \\ \beta(x)\delta_{11} + \Lambda\delta_{21} + \gamma_2(x) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

siendo

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \frac{(C_{1\star}x)^2 + (C_{2\star}x)^2}{C_{1\star}x}\,\det B,\\ \gamma_i(x) &= b_{2i}A_{1\star}x - b_{1i}A_{2\star}x, \quad i = 1,2,\\ \Lambda &= \frac{2\lambda\left(f_1^2 + f_2^2\right)^{3/2}}{\lambda_0 C_{1\star}x(x_2f_1 - x_1f_2)}.\end{aligned} \tag{16}$$

De esta expresión para Λ, teniendo en cuenta que $\lambda_0 < 0$, $\lambda > 0$ y además que $x_2f_1 - x_1f_2 < 0$ para el problema (8) y que $x_2f_1 - x_1f_2 > 0$ para el problema (9), se tiene para el problema (8) $\operatorname{sign}\Lambda = \operatorname{sign} C_{1\star}x$ y para el problema (9) $\operatorname{sign}\Lambda = -\operatorname{sign} C_{1\star}x$.

La solución del sistema (15) es

$$\delta_{11} = -\frac{\Lambda\gamma_1(x) + \beta(x)\gamma_2(x)}{\Lambda^2 + \beta^2(x)}, \quad \delta_{21} = \frac{\beta(x)\gamma_1(x) - \Lambda\gamma_2(x)}{\Lambda^2 + \beta^2(x)}. \tag{17}$$

Sustituyendo las expresiones (17) obtenidas para δ_{11} y δ_{21} en la restricción (13), teniendo en cuenta (14) y despejando Λ se obtiene que para el problema (8) es

$$\Lambda = \frac{\|Cx\|}{rC_{1\star}x}\sqrt{\|\gamma(x)\|^2 - r^2\|Cx\|^2\det^2 B}, \tag{18}$$

donde

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix}\gamma_1(x)\\ \gamma_2(x)\end{pmatrix}.$$

Para el problema (9) la expresión de Λ sólo se diferencia de (18) en que tiene signo contrario.

Poniendo en (17) la expresión obtenida para Λ se encuentra que para el problema (8) es

$$\begin{aligned}\delta_{11} = -\frac{C_{1\star}x}{\|Cx\|\,\|\gamma(x)\|^2}\Big[&r^2\gamma_2(x)\|Cx\|\det B\\ &+ r\gamma_1(x)\sqrt{\|\gamma(x)\|^2 - r^2\|Cx\|^2\det^2 B}\Big],\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\delta_{21} = \frac{C_{1\star}x}{\|Cx\|\|\gamma(x)\|^2}\Big[&r^2\gamma_1(x)\|Cx\|\det B\\ &- r\gamma_2(x)\sqrt{\|\gamma(x)\|^2 - r^2\|Cx\|^2\det^2 B}\Big],\end{aligned} \tag{20}$$

mientras que para el problema (9) las expresiones de δ_{11} y δ_{21} se diferencian de las anteriores únicamente en el signo del segundo término.

Notemos que hemos obtenido para cada problema extremal un único Δ que satisface la condición necesaria, y como aquellos tienen solución la matriz hallada Δ es precisamente la solución del problema.

Si se introducen en (10) y (11) las expresiones (14), (19) y (20) se obtienen finalmente para el vector $f_r^+(x)$ las siguientes expresiones explícitas de sus componentes:

$$\begin{aligned} f_{ir}^+(x) = A_{i\star}x - \frac{\|Cx\|}{\|\gamma(x)\|^2}\Big[& rB_{i\star}\gamma(x)\sqrt{\|\gamma(x)\|^2 - r^2\|Cx\|^2 \det^2 B} \\ & + r^2 A_{i\star}x\|Cx\| \det^2 B\Big], \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{21}$$

Por su parte, las componentes de $f_r^-(x)$ son

$$\begin{aligned} f_{ir}^-(x) = A_{i\star}x + \frac{\|Cx\|}{\|\gamma(x)\|^2}\Big[& rB_{i\star}\gamma(x)\sqrt{\|\gamma(x)\|^2 - r^2\|Cx\|^2 \det^2 B} \\ & - r^2 A_{i\star}x\|Cx\| \det^2 B\Big], \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{22}$$

Las funciones definidas por las expresiones (21) y (22) tienen sentido sobre todos los puntos del plano y no solamente sobre las regiones donde fueron definidos los sistemas auxiliares de Barabánov. Teniendo en cuenta que los sistemas extremales encontrados son de la forma $\dot{x} = (A + B\Delta C)x$, donde $\|\Delta\| \leq r$, $r \in (0, r_{\Re}^-(A,B,C))$, es fácil ver que el Teorema 4.1 sigue siendo válido si ambos sistemas auxiliares de Barabánov se consideran definidos sobre todo el plano y sus partes derechas se dan a partir de las expresiones (21) y (22).

5. Condiciones de estabilidad asintótica de los sistemas extremales

Ya hemos visto en la sección anterior la relación entre el radio de estabilidad buscado y la estabilidad de los sistemas extremales de Barabánov. Pasamos a determinar los valores de $r \in (0, r_{\Re}^-(A,B,C))$ para los cuales tales sistemas son a.e.

Como consecuencia de un teorema demostrado en [4] se deduce el siguiente resultado:

Teorema 5.1. *Sea*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{23}$$

un sistema cuya parte derecha es una función definida y continua en todo el plano, y además homogénea; es decir, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para cada $\lambda \in \Re$ y cada x. Entonces, el sistema (23) *es asintóticamente estable si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $f(x) \notin \{\theta x : \theta \geq 0\}$, *si* $x \neq 0$,

(ii) *si para todo* $\varphi \in \Re$ *es*

$$f_2(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - f_1(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi > 0, \tag{24}$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + f_2(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi}{|f_2(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - f_1(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi|}\, d\varphi < 0, \tag{25}$$

(iii) *condición análoga a la* (ii) *pero cambiando en* (24) *el signo* $>$ *por* $<$.

En lo que sigue se investiga el cumplimiento de las condiciones del Teorema 5.1 para los sistemas $\dot{x} = f_r^+(x)$ y $\dot{x} = f_r^-(x)$ cuando el parámetro r varía en el intervalo $(0, r_{\Re}^-(A,B,C))$. Las demostraciones se realizan en todos los casos sólo para el sistema $\dot{x} = f_r^+(x)$, siendo completamente análogas para el otro.

Lema 5.2. *Sea* $r \in (0, r_{\Re}^-(A,B,C))$, $x \in \Re^2$, $x \neq 0$. *Entonces*

$$f_r^+(x),\ f_r^-(x) \notin \{\theta x : \theta \geq 0\}.$$

Demostración. Se tiene que $f_r^+(x) = (A + B\Delta C)x$ para algún $\Delta \in \Re^{2\times 2}$, $\|\Delta\| \leq r$, y como $r < r_{\Re}^-(A,B,C)$ la matriz $A + B\Delta C$ es estable, de donde se deduce de manera inmediata la afirmación del Lema. ∎

El Lema 5.2 afirma que ambos sistemas extremales de Barabánov satisfacen la condición (i) del Teorema 5.1 para cada $r \in (0, r_{\Re}^-(A,B,C))$. Pasemos ahora a investigar el cumplimiento por parte de estos sistemas de las condiciones (ii) y (iii) del referido teorema. El resultado correspondiente lo da el siguiente lema, en cuyo enunciado hacemos uso de las funciones

$$\begin{aligned} g_r^+(k) &= f_{2\,r}^+(k,1)k - f_{1r}^+(k,1), \\ g_r^-(k) &= f_{2\,r}^-(k,1)k - f_{1r}^-(k,1), \end{aligned} \tag{26}$$

y los números

$$\begin{aligned} r_0^+(A,B,C) &= \inf\{r>0:\ f_{2r}^+(1,0)>0,\ g_r^+(k)>0\ \ \forall k\in\Re\},\\ r_0^-(A,B,C) &= \inf\{r>0:\ f_{2r}^-(1,0)<0,\ g_r^-(k)<0\ \ \forall k\in\Re\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Lema 5.3. *El sistema* $\dot{x}=f_r^+(x)$ *satisface la condición* (iii) *del Teorema* 5.1 *para todo* $r\in(0,r_{\Re}^-(A,B,C))$. *Para cada* $r\in(0,r_0^+(A,B,C)]$ *el sistema* $\dot{x}=f_r^+(x)$ *cumple con la condición* (ii) *del Teorema* 5.1, *mientras que si* $r\in(r_0^+(A,B,C),\,r_{\Re}^-(A,B,C))$ *el sistema cumple la condición* (ii) *si y sólo si*

$$I^+(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_{2r}^+(k,1)}{g_r^+(k)}dk<0. \tag{28}$$

Por su parte, el sistema $\dot{x}=f_r^-(x)$ *satisface la condición* (ii) *del Teorema* 5.1 *para todo* $r\in(0,r_{\Re}^-(A,B,C))$. *Para cada* $r\in(0,r_0^-(A,B,C)]$ *el sistema* $\dot{x}=f_r^-(x)$ *cumple la condición* (iii) *del Teorema* 5.1; *en tanto que si* $r\in(r_0^-(A,B,C),\,r_{\Re}^-(A,B,C))$ *la condición* (iii) *se satisface si y sólo si*

$$I^-(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_{2r}^-(k,1)}{g_r^-(k)}dk>0.$$

Demostración. Si se introduce la nueva variable $k=\cos\varphi/\sin\varphi$ en las desigualdades (24) y (25), y en esta última se realizan algunos cálculos, finalmente se obtiene que (24) es equivalente a la desigualdad

$$f_{2r}^+(1,0)>0,\quad g_r^+(k)>0\quad \text{para cada } k\in\Re, \tag{29}$$

y (25) es equivalente a la desigualdad (28).

Sea $r\in(0,r_0^+(A,B,C)]$. Entonces, de la definición (27) se tiene que no se cumple alguna de las desigualdades (29) y así tiene lugar la condición (ii) del Teorema 5.1.

Sea ahora $r\in(r_0^+(A,B,C),\,r_{\Re}^-(A,B,C))$. Veamos que se cumplen las desigualdades (29). Según la definición de $r_0^+(A,B,C)$ existe $\bar{r}<r$ tal que $f_{2\bar{r}}^+(1,0)>0$, $g_{\bar{r}}^+(k)>0$ para cada $k\in\Re$, mientras que $F_{\bar{r}}^+(x)\subset F_r^+(x)$; así, según definición (8) del vector $f_r^+(x)$, se tiene que el ángulo que el mismo cierra con el vector x es menor que el ángulo que cierra el vector $f_{\bar{r}}^+(x)$ con el propio vector x. De esta forma, si fuese $f_{2r}^+(1,0)=0$ ó $g_r^+(k)=0$ para algún $k\in\Re$, entonces $f_r^+(1,0)=\theta(1,0)$ ó $f_r^+(k,1)=\theta(k,1)$ con $\theta>0$. Sin embargo, de acuerdo al Lema 5.2 esto último no es posible. Luego, la condición (ii) del Teorema 5.1 se cumple si y sólo si tiene lugar la desigualdad (28). ∎

El siguiente resultado, que es consecuencia directa del Teorema 5.1 y los Lemas 5.2 y 5.3, resume las condiciones de estabilidad de los sistemas $\dot{x} = f_r^+(x)$ y $\dot{x} = f_r^-(x)$ cuando el parámetro $r \in (0,\, r_{\Re}^-(A,B,C))$.

Teorema 5.4. *Sea $(A,B,C) \in \left(\Re^{2\times 2}\right)^3$, A matriz estable, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Entonces, para un valor $r \in (0,\, r_{\Re}^-(A,B,C))$ el sistema $\dot{x} = f_r^+(x)$ es asintóticamente estable si y sólo si $r \leq r_0^+(A,B,C)$ ó $I^+(r) < 0$; mientras que el sistema $\dot{x} = f_r^-(x)$ es asintóticamente estable si y sólo si $r \leq r_0^-(A,B,C)$ ó $I^-(r) > 0$.*

Según este teorema, el sistema $\dot{x} = f_r^+(x)$ es a.e. para cada $r \leq r_0^+(A,B,C)$. Los dos próximos lemas aclaran lo que puede suceder para $r \in (r_0^+(A,B,C),\, r_{\Re}^-(A,B,C))$. Según éstos, la estabilidad del sistema se mantiene para valores de r en una vecindad derecha de $r_0^+(A,B,C)$ y si r es el menor valor del intervalo $(r_0^+(A,B,C),\, r_{\Re}^-(A,B,C))$ para el cual el sistema es inestable, entonces $I^+(r) = 0$. Resultados análogos se cumplen para el otro sistema extremal.

Lema 5.5. *Sea $(A,B,C) \in \left(\Re^{2\times 2}\right)^3$, A matriz estable, $B \neq 0$, $C \neq 0$, tal que $r_0^+(A,B,C) < r_{\Re}^-(A,B,C)$. Entonces el correspondiente sistema $\dot{x} = f_r^+(x)$ es asintóticamente estable si $r > r_0^+(A,B,C)$ y r está suficientemente próximo a $r_0^+(A,B,C)$. Análogamente, si $r > r_0^-(A,B,C)$, $r_0^-(A,B,C) < r_{\Re}^-(A,B,C)$ y r está suficientemente próximo al número $r_0^-(A,B,C)$, el correspondiente sistema $\dot{x} = f_r^-(x)$ es asintóticamente estable.*

Demostración. Sea $r \in (r_0^+(A,B,C),\, r_{\Re}^-(A,B,C))$. Entonces, según la definición (27) y el Lema 5.3 se cumple que

(i) existe un único número $k_0 \in \Re$ tal que $g^+_{r_0^+(A,B,C)}(k_0) = 0$,

(ii) $g_r^+(k) > 0$ para cada $k \in \Re$.

Consideremos los sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f^+_{r_0^+(A,B,C)}(x), \tag{30}$$

$$\dot{x} = f_r^+(x). \tag{31}$$

Sea l la recta de pendiente k_0 que pasa por el origen de coordenadas, y sea $x_0 \in l$ tal que $\|x_0\| = 1$. De (i) se tiene que la trayectoria del sistema (30) que pasa por x_0 coincide con el rayo que pasa por x_0 partiendo del origen y el movimiento sobre éste se produce hacia el origen, según se deduce del Lema 5.2.

Sea $x_r(t)$ la solución de (31) que cumple $x_r(0) = x_0$. Luego, de la condición (ii) es fácil ver que existe un $\tau > 0$ tal que $x_r(\tau) \in l$. Tomemos el τ minimal para el cual se cumple esta inclusión.

De la continuidad de las soluciones del sistema (31) respecto al parámetro $r \geq r_0^+(A, B, C)$ queda claro que $x_r(\tau) \to 0$ si $r \to r_0^+(A, B, C)$, y así $|x_r(\tau)| < 1$ si r es suficientemente pequeño, pero entonces la solución $x_r(\tau) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, y por la homogeneidad del sistema lo mismo ocurre con todas las soluciones del sistema (31); es decir, ese sistema es a.e. ∎

Lema 5.6. *La función $r \to I^+(r)$, para $r \in (r_0^+(A, B, C),\ r_{\Re}^-(A, B, C))$, es monótona creciente; mientras que la función $r \to I^-(r)$, si $r \in (r_0^-(A, B, C),\ r_{\Re}^-(A, B, C))$, es monótona decreciente.*

Demostración. Es consecuencia de la monotonía creciente respecto a r de la función integrando $r \to f_{2r}^+(k, 1)/g_r^+(k)$, ya que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f_{2r}^+(k,1)}{g_r^+(k)}\right) = \frac{\left\| C \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \sqrt{\|\gamma(k,1)\|^2 - r^2 \left\| C \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 \det^2 B}}{\left(g_r^+(k)\right)^2} > 0.$$

∎

6. Resultado fundamental

Los resultados de las secciones anteriores fundamentan el resultado principal de este trabajo, que expondremos a continuación. Este teorema brinda un algoritmo para el cálculo del radio de estabilidad buscado cualquiera sea el trío (A, B, C), ya que cada una de las expresiones que aparecen en el teorema puede ser calculada en términos del trío y del parámetro r.

Definamos los números

$$r^+(A, B, C) = \begin{cases} r_{\Re}^-(A, B, C) \text{ si } \begin{cases} r_0^+(A, B, C) \notin (0,\ r_{\Re}^-(A, B, C)), \\ \quad \text{ó} \\ \lim\limits_{r \uparrow r_{\Re}^-(A,B,C)} I^+(r) \leq 0, \end{cases} \\ \\ \text{raíz de } I^+(r) = 0 \quad \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \tag{32}$$

y

$$r^-(A,B,C) = \begin{cases} r_{\Re}^-(A,B,C) \text{ si } \begin{cases} r_0^-(A,B,C) \notin (0,\, r_{\Re}^-(A,B,C)), \\ \text{ó} \\ \lim\limits_{r\uparrow r_{\Re}^-(A,B,C)} I^-(r) \geq 0, \end{cases} \\ \\ \text{raíz de } I^-(r) = 0 \;\; \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{33}$$

TEOREMA 6.1. *Sea el trío* $(A,B,C) \in \left(\Re^{2\times 2}\right)^3$, *tal que* A *es una matriz estable,* $B \neq 0$, $C \neq 0$. *Entonces*

$$r_{\Re,\,t}^-(A,B,C) = \min\left\{r^+(A,B,C),\, r^-(A,B,C)\right\},$$

donde los números $r^+(A,B,C)$ *y* $r^-(A,B,C)$ *fueron definidos respectivamente en* (32) *y* (33).

Demostración. Teniendo en cuenta la afirmación del Teorema 4.1 es suficiente probar que los sistemas $\dot{x} = f_r^+(x)$ y $\dot{x} = f_r^-(x)$ son a.e. si y sólo si respectivamente $r < r^+(A,B,C)$ y $r < r^-(A,B,C)$, lo cual es consecuencia directa de las definiciones (32), (33), el Teorema 5.4 y los Lemas 5.3, 5.5 y 5.6. ∎

7. EJEMPLO

Por último, presentamos la aplicación del Teorema 6.1 al cálculo del radio de estabilidad de un trío concreto. Sean

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando los resultados obtenidos calculamos el radio de estabilidad de la matriz A bajo perturbaciones lineales de estructura $A \to A + B\Delta(t)C$. Mediante cálculos sencillos se llega a que

$$r_{\Re}^-(A,B,C) = 5, \quad r_0^+(A,B,C) = +\infty, \quad r_0^-(A,B,C) \approx 0.482637.$$

Se obtuvo además la expresión exacta de $I^-(r)$ como función del parámetro r y haciendo uso del sistema de cálculo simbólico "Mathematica"se llegó a que la raíz de la ecuación $I^-(r) = 0$ está entre los números 4.61255 y 4.61256, es decir, $r_{\Re,\,t}^-(A,B,C) \approx 4.61255$.

Referencias

[1] Barabanov, N.E., Stability of two-dimensional differential inclusions, (Russian), *Differentsial'nye Uravneniya*, **10** (26), (1990), 1817 – 1818, 1839.

[2] Colonius, F., Kliemann, W., Stability radii and Liapunov exponents, in "Control of Uncertain Systems", D. Hinrichsen and B. Mårtensonn (eds.), Birkhäuser, Boston, 1990, 19 – 55.

[3] Farhan, G.A., González, M.H., Radio de estabilidad real para perturbaciones estructuradas dependientes del tiempo, *Ciencias Matemáticas*, **15** (2-3) (1994), 23 – 26.

[4] Filippov, A.F., Stability conditions of homogeneous systems with arbitrary switches of the operating modes, *Automat. Remote Control,* **41** (8) (1980), 1078 – 1085 (1981); translated from *Avtomat. i Telemekh.* 1980, no. 8, 48 – 55 (Russian).

[5] González, M.H., Urquiza, S.R., Sobre el radio de estabilidad de sistemas bidimensionales de ecuaciones diferenciales, *Ciencias Matemáticas*, **17** (2) (1999), 82 – 96.

[6] Hinrichsen, D., Pritchard, A.J., Stability radii of linear systems, *Systems and Control Letters*, **7** (1986), 1 – 10.

[7] Hinrichsen, D., Pritchard, A.J., Stability radius for structured perturbations and the algebraic Riccati equation, *Systems and Control Letters*, **8** (1986), 105 – 113.

[8] Qiu, L., Bernhardsson, B., Rantzer, A., Davison, E.J., Young, P.M., Doyle, J.C., A formula for computation of the real structured stability radius, *Automatica,* **31** (1995), 879 – 890.