EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 13, Núm. 3, 263 – 269 (1998)

Sur les Intégrales Premières Symétriques du Flot Géodésique

MOHAMED BOUCETTA

Faculté des Sciences et Techniques, Gueliz BP 618 Marrakech, Maroc

(Research paper presented by A. Ibort)

AMS *Subject Class.* (1991): 53B30 *Received July* 10, 1997

1. Rappels et notations

Dans cette section, nous allons rappeler certains notions classiques de la géométrie riemannienne et fixer les notations pour la suite. Pour plus de détails voir [1], [2],[4], [6] et [5].

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension d. La métrique définit un isomorphisme fibré $\omega^\flat : TM \to T^*M$ entre le fibré tangent et le fibré cotangent. On notera $^\# : T^*M \to TM$ son isomorphisme inverse.

Soit α la forme de Liouville sur T^*M et $\alpha_g = (\omega^\flat)^*\alpha$. Le couple $(TM, d\alpha_g)$ est une variété symplectique.

Pour tout $h \in C^\infty(TM)$, on notera X_h le champ de vecteurs hamiltonien défini par

$$i_{X_h} d\alpha_g = -dh.$$

Pour tout $h_1, h_2 \in C^\infty(TM)$, le crochet de Poisson de h_1 par h_2 est donné par

$$\{h_1, h_2\} = d\alpha_g(X_{h_1}, X_{h_2}).$$

En particulier, si E désigne la fonction énergie définie par $E(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$, le champ de vecteurs X_E sera noté Z. Z est le flot géodésique de (M, g).

Soit $P : TM \to M$ la projection canonique et $TP : TTM \to TM$ son application tangente. On notera VTM le sous fibré vertical de TTM noyau de TP. Pour tout $v \in TM$, on a une identification naturelle $i_v : V_vTM \to T_{P(v)}M$.

Le flot géodésique Z définit un connecteur $K : TTM \to TM$ et une distribution horizontale H tels que $TTM = VTM \oplus H, K(H) = 0$ et

$K(V_v) = i_v(V_v)$, pour tout vecteur vertical V_v. La connection de Levi-Civita est donnée par

$$D_X Y = K(TY(X)).$$

Pour tout $v \in TM$, $T_vP : H_v \to T_{P(v)}M$ et un isomorphisme et on notera $R_v : T_{P(v)}M \to H_v$ son isomorphisme inverse. Le flot géodésique Z est horizontal et on a $Z(v) = R_v(v)$.

Dans ce formalisme, la forme symplectique $d\alpha_g$ est donnée par

$$d\alpha_g(X_1, X_2) = g(K(X_1), TP(X_2)) - g(K(X_2), TP(X_1)). \tag{1}$$

2. Structure d'algèbre de Lie sur l'espace des formes symétriques invariantes par le flot géodésique

Dans cette section nous allons définir la structure d'algèbre de Lie de l'espace des formes symétriques invariantes par le flot géodésique et montrer que l'espace des formes symétriques parallèles est une sous algèbre de Lie abelienne.

Soit (M, g) une variété riemannienne. Les notations et définitions sont celles de la section précédente.

Pour tout entier p, on notera $\mathcal{S}^pM$ le $C^\infty(M)$-module des p-formes symétriques sur M et, pour tout $h \in \mathcal{S}^pM$, on notera $\tilde{h} : TM \to R$ la fonction définie par

$$\tilde{h}(v) = \frac{1}{p} h(v, \ldots, v).$$

DÉFINITION 2.1. Soit $h \in \mathcal{S}^pM$. On dira que h est invariante par le flot géodésique (respectivement parallèle) si $Z(\tilde{h}) = 0$ (respectivement $Dh = 0$).

L'opérateur différentiel $\delta_p^* : \mathcal{S}^pM \to \mathcal{S}^{p+1}M$ défini par

$$\delta_p^* h(X_1, \ldots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (D_{X_i} h)(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1}),$$

et appelé codivergence, permet de caractériser les formes symétriques invariantes par le flot géodésique, comme l'indique la proposition suivante:

PROPOSITION 2.1. *Soit $h \in \mathcal{S}^pM$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *h est invariante par le flot géodésique.*

ii) *Pour toute géodésique* $\gamma : I \to M$, *la fonction* $t \mapsto \tilde{h}(\dot\gamma(t))$ *est constante sur* I.

iii) *Pour tout champ de vecteurs* X *sur* M, $D_X h(X, \dots, X) = 0$.

iv) $\delta_p^* h = 0$.

Preuve. Il est claire que i) est équivalente à ii) et iii) est équivalente à iv).

Pour vérifier que i) est équivalente à iii), il suffit de remarquer que, pour tout $m \in M$ et tout $v \in T_m M$,

$$D_v h(v, \dots, v) = \frac{d}{dt} h(\phi_t(v), \dots, \phi_t(v)) \mid_{t=0},$$

où ϕ_t est le flot du champ Z.

En effet, soit $\gamma(t) = P(\phi_t(v))$ la géodésique passant par m et vérifiant $\dot\gamma(0) = v$, et X un champ de vecteurs quelconque tel que $X(\gamma(t)) = \dot\gamma(t)$. On a

$$(X \cdot h(X, \dots, X))_m = \frac{d}{dt} h(\phi_t(v), \dots, \phi_t(v)) \mid_{t=0} .$$

Or

$$X \cdot h(X, \dots, X) = D_X h(X, \dots, X) + p h(D_X X, X, \dots, X).$$

Ceci permet de conclure en remarquant que $(D_X X)_m = 0$. ∎

On notera $\mathcal{G}_p$ le R-espace vectoriel des p-formes symétriques invariantes par le flot géodésique et on pose

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{G}_p.$$

On notera $\mathcal{P}_p$ le R-espace vectoriel des p-formes symétriques parallèles et on pose

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{P}_p.$$

Pour tout p, $\mathcal{P}_p$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{G}_p$.

Remarque. (Voir [3]) On a clairement les formules suivantes:

i) Pour tout $f \in \mathcal{S}^0 M$, $\delta_0^* f = df$.

ii) Pour tout $\alpha \in \mathcal{S}^1 M$,

$$\delta_1^* \alpha = L_{\#\alpha} g. \tag{2}$$

De ces deux formules, on déduit que $\mathcal{G}_0 = H^0(M,R)$ et $\#\mathcal{G}_1$ est'egale à l'algèbre des champs de Killing sur M.

LEMME 2.1. *Pour tout $h \in \mathcal{G}_p$, tout $v \in TM$ et tout $X_v \in T_vTM$ on a*

$$d_v\tilde{h}(X_v) = h(v,\dots,v,K(X_v)) - D_vh(v,\dots,v,TP(X_v)).$$

Preuve. On a clairement pour tout vecteur tangent vertical V_v

$$d_v\tilde{h}(V_v) = h(v,\dots,v,K(V_v)).$$

Soit maintenant un vecteur tangent horizontal H_v et soit $\Gamma : [-\epsilon,+\epsilon] \to TM$ une courbe différentiable telle que $\Gamma(0) = v$ et $\dot{\Gamma}(0) = H_v$. Γ est un champ de vecteurs le long de la courbe $P \circ \Gamma : [-\epsilon,+\epsilon] \to M$. Soit X un champ de vecteurs au voisinage de $P \circ \Gamma$ qui prolonge Γ et Y un champ de vecteurs au voisinage de $P \circ \Gamma$ qui prolonge le champ de vecteurs vitesse le long de $P \circ \Gamma$. On aura donc

$$\begin{aligned} d_v\tilde{h}(H_v) &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}h(\Gamma(t),\dots,\Gamma(t))\,|_{t=0} \\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}h(X(P\circ\Gamma(t)),\dots,X(P\circ\Gamma(t)))\,|_{t=0} \\ &= \frac{1}{p}Y\cdot h(X,\dots,X)(P(v)). \end{aligned}$$

Or

$$\delta_p^*h(Y,X,\dots,X) = D_Yh(X,X,\dots,X) + pD_Xh(Y,X,\dots,X) = 0,$$

et donc

$$Y\cdot h(X,\dots,X) = ph(D_YX,X,\dots,X) - pD_Xh(X,\dots,X,Y).$$

D'un autre côté

$$Y_{P(v)} = TP(H_v) \quad \text{et} \quad D_YX(P(v)) = K(TX(Y_{P(v)})) = K(H_v) = 0.$$

Pour conclure il suffit de remarquer que pour tout $X_v \in T_vTM$ on a

$$X_v = i_v^{-1}K(X_v) + R_v(TP(X_v)).$$

∎

Dans tout ce qui suit, et pour toute p-forme h sur M et pour tout $v \in TM$, on notera $i_v^{p-1}h$ la 1-forme obtenue par produit intérieur $p-1$ fois de h par v.

LEMME 2.2. *Soit $h \in \mathcal{G}_p$ et $X_{\tilde{h}}$ le champ de vecteurs hamiltonien associé à $\tilde{h}$. On a*

$$K(X_{\tilde{h}}(v)) = \# i_v^{p-1} D_v h, \qquad TP(X_{\tilde{h}}(v)) = \# i_v^{p-1} h.$$

En particulier, si h est parallèle, $X_{\tilde{h}}$ est horizontal.

Preuve. C'est une application directe du lemme 2.1, de la formule (1) et de la définition de $X_{\tilde{h}}$. ∎

LEMME 2.3. *Soient $h_1 \in \mathcal{G}_p$ et $h_2 \in \mathcal{G}_q$. Le crochet de Poisson de $\tilde{h}_1$ et $\tilde{h}_2$ est donné par la formule*

$$\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\}(v) = g(\# i_v^{q-1} h_2, \# i_v^{p-1} D_v h_1) - g(\# i_v^{p-1} h_1, \# i_v^{q-1} D_v h_2).$$

En particulier, si h_1 et h_2 sont parallèles alors $\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\} = 0$.

Preuve. C'est une application directe de la définition du crochet de Poisson et du lemme 2.2. ∎

Soient $h_1 \in \mathcal{G}_p$ et $h_2 \in \mathcal{G}_q$. On définie la $(p+q-1)$-forme symétrique $[h_1, h_2]$ par

$$\begin{aligned} &[h_1, h_2](X_1, \ldots, X_{p+q-1}) \\ &= \frac{1}{(p+q-1)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q-1}} g(\# i_{X_{\sigma(1)}} \ldots i_{X_{\sigma(q-1)}} h_2, \# i_{X_{\sigma(q)}} \ldots i_{X_{\sigma(p+q-2)}} D_{X_{\sigma(p+q-1)}} h_1) \\ &\qquad - g(\# i_{X_{\sigma(1)}} \ldots i_{X_{\sigma(p-1)}} h_1, \# i_{X_{\sigma(p)}} \ldots i_{X_{\sigma(p+q-2)}} D_{X_{\sigma(p+q-1)}} h_2). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.3, on a

$$\widetilde{[h_1, h_2]}(v) = \frac{1}{p+q-1} \{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\}(v).$$

Nous avons donc établis le résultat suivant:

THÉORÈME 2.1. *$(\mathcal{G}, [,])$ est une algèbre de Lie et $\mathcal{P}$ en est une sous algèbre de Lie abélienne.*

Cette structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ est naturelle en ce sens qu'elle généralise le crochet de Lie des champs de vecteurs défini sur $\mathcal{G}_1$ identifié à l'algèbre des champs de Killing. Plus précisement on a

PROPOSITION 2.2. *Soit $h_1 \in \mathcal{G}_p$ et soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{G}_1$. On a les formules:*

i) $\#[\alpha_1, \alpha_2] = [\#\alpha_1, \#\alpha_2]$.

ii) $[\alpha_1, h] = L_{\#\alpha_1} h$.

Preuve. D'après le lemme 2.3, on a

$$\widetilde{[\alpha_1, \alpha_2]}(v) = g(\#\alpha_2, \#D_v\alpha_1) - g(\#\alpha_1, \#D_v\alpha_2).$$

Or $\#D_v\alpha_i = D_v\#\alpha_i$ et, puisque $\#\alpha_i$ est un champ de Killing, on a

$$g(\#\alpha_2, D_v\#\alpha_1) = -g(v, D_{\#\alpha_2}\#\alpha_1).$$

On en déduit donc la formule

$$\widetilde{[\alpha_1, \alpha_2]}(v) = g(v, [\#\alpha_1, \#\alpha_2]).$$

Ceci établit i).

Pour tout champ de vecteurs X et Y on a

$$L_X h(Y, \dots, Y) = D_X h(Y, \dots, Y) + ph(D_Y X, Y, \dots, Y).$$

Or $\delta_p^* h = 0$ ce qui entraine que

$$D_X h(Y, \dots, Y) = -pD_Y h(X, Y, \dots, Y).$$

On en déduit que

$$D_X h(Y, \dots, Y) = -pD_Y h(X, Y, \dots, Y).$$

On en déduit que

$$L_X h(Y, \dots, Y) = p(g(\#i_Y^{p-1} h, D_Y X) - g(X, \#i_Y^{p-1} D_Y h)).$$

Ceci permet d'établir ii). ∎

RÉFÉRENCES

[1] ABRAHAM, R., MARSDEN, J.E., "Foundations of Mechanics", 2nd edition, Reading, Massachusetts, 1978.

[2] BESSE, A.L., "Manifolds all of whose Geodesics are Closed", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[3] BESSE, A.L., "Einstein Manifolds", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[4] DOMBROWSKI, P., On the geometry of the tangent boundle, *J. Reine Angew. Math.,* **210** (1962), 73–88.

[5] WEINSTEIN, A., The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geom.,* **18** (1983), 523–557.

[6] YANO, K., ISHIHARA, S., "Tangent and Cotangent Bundles", Pure and Appl. Maths., Marcel Dekker, New York, 1973.