EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **11**, Núm. 2, 301 – 305 (1996)

Continuité Automatique des Dérivations et des Epimorphismes II

E. ILLOUSSAMEN*

E.N.S. Takaddoum, Départ. Math., Avenue Oued Akreuch B.P. 5118 *Rabat (Maroc)*

(Presented by J.A. Navarro)

AMS *Subject Class.* (1991): 46H40 *Received October* 2, 1995

INTRODUCTION

Nous donnons quelques résultats concernant la continuité automatique des dérivations et des épimorphismes dans certaines algèbres de Banach (complexes). Il est bien connu que toute dérivation dans une algèbre de Banach semi-simple est continue ([7]). De même tout épimorphisme d'une algèbre de Banach sur une algèbre de Banach semi-simple est continu ([6]). Cependant, pour les algèbres de Banach semi-premières les deux questions suivantes sont encore, à notre connaissance, ouvertes:

Q1: Est-ce que toute dérivation dans une algèbre de Banach semi-première est continue?

Q2: Est-ce que tout épimorphisme d'une algèbre de Banach sur une algèbre de Banach semi-première est continu?

Dans [1], J. Cusack a montré que les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) L'espace séparateur d'un épimorphisme d'une algèbre de Banach sur une algèbre de Banach est nilpotent.

(ii) Tout épimorphisme d'une algèbre de Banach sur une algèbre de Banach semi -première est continu.

(iii) Tout épimorphisme d'une algèbre de Banach sur une algèbre de Banach première est continu.

*L'auteur tient à remercier Prof. E. Albrecht et Prof. M. Oudadess pour leur encadrement ainsi que le D.A.A.D. pour son appui financier.

Pour les dérivations, nous avons également, d'après [8], l'équivalence des assertions suivantes:

(i') L'idéal séparateur d'une dérivation dans une algèbre de Banach est nilpotent.

(ii') Toute dérivation dans une algèbre de Banach semi-première est continue.

(iii') Toute dérivation dans une algèbre de Banach première est continue.

Ces résultats permettent de réduire l'étude des questions Q1 et Q2 aux algèbres de Banach premières. Dans le cas commutatif, l'étude se réduit aux algèbres de Banach intègres. D'ailleurs certains auteurs ont traîté les questions Q1 et Q2 dans le cas commutatif , voir [3], [4], [5] et [9] où sont donnés des conditions suffisantes qui impliquent la continuité automatique des dérivations et des épimorphismes. Nous nous proposons ici d'étendre ces résultats au cas des algèbres de Banach non nécessairement commutatives, le travail qui a été déjà commencé dans [5].

Preliminaires

Soit A une algèbre. Une application linèaire $D : A \to A$ est dite une dérivation si $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ pour tous $a, b \in A$. A est dite semi-première si pour tout idéal à gauche I de A on a : $I^2 = \{0\} \Longrightarrow I = \{0\}$. A est dite première si pour tous I, J idéaux à gauche de A on a : $I.J = \{0\} \Longrightarrow I = \{0\}$ ou $J = \{0\}$. Supposons que A est une algèbre de Banach et $D : A \to A$ une dérivation dans A. Considérons $\sigma = \{y \in A$ tel qu'il existe $x_n \to 0$ et $Dx_n \to y\}$. σ est un idéal (bilatère) fermé de A, appelé idéal séparateur de D, et D est continue si et seulement si $\sigma = \{0\}$. De plus on a la propriété de stabilité suivante: Pour toute suite $(a_n)_n$ d'éléments de A, il existe m, entier naturel, tel que $\overline{a_1 \cdots a_n \sigma} = \overline{a_1 \cdots a_m \sigma}$ pour tout $n \geq m$. De même si $h : B \to A$ est un épimorphisme d'une algèbre de Banach B sur A, on définit de la même manière son idéal séparateur. Celui-ci vérifie les mêmes propriétés que celui d'une dérivation.

Rappelons enfin que si A est une algèbre et si M est une partie de A, alors M sera dite nil si tout élément de M est nilpotent. M est dite nilpotente s'il existe un entier naturel n tel que $M^n = \{0\}$, c'est à dire que le produit de n éléments quelconques de M est nul.

LES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Le résultat suivant, qui est une amélioration du théorème 4.1. de [5], est l'extension naturel au cas non commutatif du théorème 3 de [9].

THÉORÈME 1. *Soit A une algèbre de Banach première. Supposons qu'il existe J idéal à droite de A et un élément non nilpotent $a \in J$ tels que $\bigcap_{n\geq 1} a^n J = \{0\}$. Alors toute dérivation dans A est continue. De même tout épimorphisme sur A (i.e. tout épimorphisme d'une algèbre de Banach quelconque sur A) est continu. En particulier toutes les normes d' algèbres de Banach sur A sont équivalentes.*

Démonstration. Soit σ l'idéal séparateur d'une dérivation dans A ou d'un épimorphisme sur A. Soit m tel que $\overline{a^m\sigma} = \overline{a^n\sigma}$ pour tout $n \geq m$. D'aprés le théorème de Mittag-Leffler, on a $\overline{a^m\sigma} = \overline{\bigcap_{n\geq 1} a^n\sigma}$. Puisque $a \in J$, on a $a\sigma \subseteq J$. Donc $\overline{\bigcap_{n\geq 1} a^n\sigma} = \overline{\bigcap_{n\geq 2} a^n\sigma} \subseteq \overline{\bigcap_{n\geq 1} a^n J} = \{0\}$. D'où $a^m\sigma = \{0\}$. Soit $< a^m >$ l'idéal(bilatère) engendré par a^m. Un élément x quelconque de $< a^m >$ est de la forme:

$$x = \alpha a^m + sa^m + a^m t + \Sigma s_i' a^m t_i'$$

où α est un complexe et $s, t, s_i', t_i' \in A (i = 1, \cdots, p)$. On vérifie alors aisement que $< a^m > \sigma = \{0\}$. Comme $< a^m > \neq \{0\}$ (car a est non nilpotent) nous obtenons $\sigma = \{0\}$. ∎

Remarques. 1. Le théorème précédent reste vrai si J est un idéal à gauche tel que $\bigcap_{n\geq 1} Ja^n = \{0\}$. En effet on aura $\overline{\sigma a^m} = \overline{\bigcap_{n\geq 1} \sigma a^n} \subseteq \overline{\bigcap_{n\geq 1} Ja^n} = \{0\}$.
2. Un exemple d'algèbre de Banach première vérifiant l'hypothèse du Théorème précédent est donné dans [5].

COROLLAIRE 2. *Soit A une algèbre de Banach première. Supposons qu'il existe J idéal à droite ou à gauche de A tel que $\bigcap_{n\geq 1} J^n = \{0\}$. Alors toute dérivation dans A est continue. De même tout épimorphisme sur A est continu.*

Démonstration. Les éléments de J ne peuvent pas être tous nilpotents car dans une algèbre de Banach première (en fait même semi-première) le seul idéal nil est $\{0\}$(cf. [2]). Donc J contient un élément non nilpotent a. On a alors $\bigcap_{n\geq 1} a^n J \subseteq \bigcap_{n\geq 1} J^n = \{0\}$. De même $\bigcap_{n\geq 1} Ja^n \subseteq \bigcap_{n\geq 1} J^n = \{0\}$. Ce qui fini la preuve. ∎

Soit maintenant A une algèbre de Banach et soit σ l'idéal séparateur d'une dérivation dans A ou d'un épimorphisme sur A. Comme cela a été mentionné dans l'introduction, on ne sait pas si σ est nilpotent, c'est à dire si $\sigma \subseteq L$ (le radical premier de A). En fait pour cela, il suffit que $\bigcap_{n\geq 1}\sigma^n \subseteq L$ comme le montre le résultat suivant:

PROPOSITION 3. *Soit A une algèbre de Banach et soit σ l'idéal séparateur d'une dérivation dans A ou d'un épimorphisme sur A. Alors σ est nilpotent si et seulement si l'idéal engendré par $\bigcap_{n\geq 1}\sigma^n$ est nil.*

Démonstration. La première implication est triviale. Inversement supposons que l'idéal engendré par $\bigcap_{n\geq 1}\sigma^n$, noté K, est nil. Soit $x \in \sigma$, il existe m tel que $\overline{x^m\sigma} = \overline{\bigcap_{n\geq 1} x^n\sigma} \subseteq \overline{\bigcap_{n\geq 1}\sigma^n}$. D'aprés un résultat de P.G. Dixon ([2], th. 2.4.), K est contenu dans une réunion d'idéaux nilpotents. Donc $\bigcap_{n\geq 1}\sigma^n$ est contenu dans $\sigma\bigcap L$. Or $\sigma\bigcap L$ est fermé ([1], corollaire 2.4.), donc $\overline{\bigcap_{n\geq 1}\sigma^n} \subseteq \sigma\bigcap L$, ce qui donne $\overline{x^m\sigma} \subseteq L$. Par suite x est nilpotent. D'où σ est nilpotent. ∎

Remarque. Dans le cas d'une algèbre de Banach commutative A, on peut montrer l'équivalence:

$$(*) \quad \sigma \text{ est nilpotent} \iff \text{l'ensemble} \bigcap_{n\geq 1}\sigma^n \text{ est nil.}$$

De plus on a bien $\sigma \subseteq R$ (le radical de Jacobson de A) et cela d'après [10] et [6]. Ce qui donne $\bigcap_{n\geq 1}\sigma^n \subseteq \sigma\bigcap(\bigcap_{n\geq 1}R^n)$. Donc $(*)$ est une amélioration du théorème 3.1. de [4].

COROLLAIRE 4. *Soit A une algèbre de Banach semi-première. Soit σ l'idéal séparateur d'une dérivation dans A ou d'un épimorphisme sur A. Alors $\sigma = \{0\}$ si et seulement si $\bigcap_{n\geq 1}\sigma^n = \{0\}$.*

Remarque. Le corollaire précédent a été démontré pour les dérivations dans le cas commutatif par R. V. Garimella dans [4].

RÉFÉRENCES

[1] CUSACK, C., Automatic continuity and topologically simple radical Banach algebras, *J. London Math. Soc.,* **16** (2) (1977), 493–500.

[2] DIXON, P.G., Semiprime Banach Algebras, *J. London Math. Soc.,* **6** (2) (1973), 676–678.

[3] GARIMELLA, R.V., Continuity of derivation on some semi prime Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **99** (1987), 289 - 292.

[4] GARIMELLA, R.V., On nilpotency of the separting ideal of a derivation, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **117** (1993), 167 - 174.

[5] ILLOUSSAMEN, E., Continuité des dérivations et des épimorphismes dans certaines algèbres de Banach, *Rendiconti Circolo Mat. Palermo, Serie II,* **44** (1995), 173 - 186.

[6] JOHNSON, B.E., The uniqueness of the (complete) norm topology, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **73** (1967), 537 - 539.

[7] JOHNSON, B.E., SINCLAIR, A.M., Continuity of derivation and a problem of Kaplansky, *Amer. J. Math.,* **90** (1968), 1067 - 1073.

[8] MATHIEU, M., RUNDE, V., Derivations mapping into the radical II, *Bull. London Math. Soc.,* **24** (1992), 485 - 487.

[9] RUNDE, V., Automatic continuity of derivations and epimorphisms, *Pacific J. Math.,* **147** (1991), 365 - 374.

[10] THOMAS, M.P., The image of a derivation is contained in the radical, *Annals Math.,* **128** (1988), 435 - 460.