EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **11**, Núm. 2, 261 – 267 (1996)

Sur l'Expression du Radical et du Spectre dans une Algèbre Normée non Complète

A. Beddaa

Ecole Normale Supérieure, B.P. 5118-*Takaddoum, Maroc*

(Presented by A. Rodríguez Palacios)

AMS *Subject Class.* (1991): 46H05 *Received March* 15, 1996

Introduction

Les algèbres (associatives) considérées dans cet article sont supposées complexes commutatives et unitaires. Il est bien connu que dans une algèbre de Banach ou plus généralement dans une algèbre localement multiplicativement convexe (a.l.m.c.) complète ([2]) A, la propriété suivante:

$$\text{(P)} \qquad A_J = \{\ker \chi \colon \chi \in \Gamma_A\},$$

est verifiée où A_J désigne le radical de Jacobson et Γ_A l'ensemble des caractères non nuls de A. Cette propriété (algébrique) est aussi vraie dans les algèbres spectrales au sens de T.W. Palmer ([3]), puisque dans de telles algèbres tout idéal maximal est de codimension 1. Nous montrons que dans le cas général, (P) n'est pas toujours vérifiée. En fait elle ne l'est pas toujours dans les algèbres normées non complètes et dans les algèbres localement convexes métrisables complètes (B_0-algèbres). Nous montrons aussi l'existence d'algèbres normées dont le radical n'est pas fermé.

D'un autre côté, nous considérons, dans une algèbre A, la proprieté:

$$\text{(P}'\text{)} \qquad \operatorname{Sp} x = \{\chi(x) \colon \chi \in \Gamma_A\}.$$

Il est facile de voir que (P$'$) est vérifiée dans une algèbre dont tout ideal maximal est de codimension 1 (en particulier dans toute algèbre spectrale). Nous donnons un exemple d'une algèbre non spectrale admettant des idéaux maximaux de codimension infinie et dans laquelle la propriété (P$'$) est vérifiée. Nous ne savons pas si les algèbres normées focntionnellement continues (i.e.

dont tout caractère est continu) sont des Q-algèbres. Cependant, nous montrons que c'est le cas si (P′) est vérifiée. En utilisant (P′), on obtient que dans l'algèbre des polynômes à coefficients dans le corps des complexes C, il n'existe aucune norme d'algèbre rendant continus tous les caractères. Ce dernier résultat permet de montrer qu'il n'existe aucun poids W vérifiants $W(n) \geq n!$ pour tout n dans N.

Préliminaires

Nous suivons les notations et la terminologie introduites par T.W. Palmer dans [3]. Rappelons que le radical de Jacobson d'une algèbre (commutative) A, noté A_J, est l'intersection des idéaux maximaux de A. Si on désigne par $G(A)$ le groupe des éléments inversibles de A, on a $A_J = \{x \in A\colon e + xy \in G(A)$, pour tout y de $A\}$, où e est l'unité de A. On dit que A est semi-simple si $A_J = \{0\}$. Le spectre d'un élément x de A est l'ensemble $\operatorname{Sp} x = \{\lambda \in C\colon \lambda e - x \notin G(A)\}$. On note par $\rho(x) = \sup\{|\lambda|\colon \lambda \in \operatorname{Sp} x\}$ le rayon spectral de x. Une algèbre A est dite spectrale ([3]) s'il existe une semi-norme sous multiplicative p telle que $\rho(x) \leq p(x)$, pour tout x de A (une telle semi-norme est dite spectrale). Une algèbre A est dite une Q-algèbre si $G(A)$ est ouvert.

1. Expresion du radical

Dans [3], p. 312, une erreur de formulation (comme le montre le reste de l'article [3]) fait comprendre que dans une algèbre commutative A, le radical de Gelfand A_Γ coïncide avec le radical de Jacobson A_J (i.e. (P) est toujours vérifiée). En fait l'exemple 2.2 et l'exemple 2.8 donnés par l'auteur lui-même montrent que le deux radicaux A_Γ et A_J sont, en général, distincts. Les algèbres dans ces exemples ne peuvent pas être munies d'une norme d'algèbre, à cause du théorème de Gelfand-Mazur. Nous donnons maintenant une algèbre normée commutative qui ne vérifie pas la propriété (P).

Soit $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach commutative telle que le radical A_J contienne un élément x non nilpotent. Dans [5], S. Rolewicz a construit une suite $(a_{k,n})_{k,n}$ en fonction de x telle que $a_{k,n} \geq 1$, pour tout n et k et $a_{k,n+m} \leq a_{k+l,n} \cdot a_{k+l,m}$, pour tout k, n, m dans N; et il a considéré

$$B = \{(x_n)_{n\geq 1} \subset A\colon \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n}\|x_n\| < +\infty,\ \ \forall k\}.$$

C'est une algèbre lorsqu'on la munit des opérations usuelles et du produit de convolution. Munie de la norme définie par $\|(x_n)_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$, c'est une algèbre normée contenant A et $x \notin B_J$ ([5]). Mais $x \in \cap\{\ker\chi\colon \chi \in \Gamma_B\}$, puisque la restriction de tout élément de Γ_B est un élément de Γ_A et $x \in A_J = \cap\{\ker\chi\colon \chi \in \Gamma_A\}$. D'où $B_J \neq \cap\{\ker\chi\colon \chi \in \Gamma_B\}$.

Remarques. 1) Soit A une algèbre normée qui ne vérifie pas la propriété (P). Alors

a) A n'est pas spectrale, en particulier elle ne peut être munie d'aucune norme d'algèbre qui en fasse une Q-algèbre.

b) La complétée de A n'est pas semi-simple.

c) Il existe un idéal maximal de codimension infinie.

d) Il existe un élément x tel que $\operatorname{Sp} x \neq \{\chi(x)\colon \chi \in \Gamma_A\}$.

2) Si on prend pour A l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à l'algèbre $L^1[0,1]$ des fonctions intégrables sur $[0,1]$, S. Rolewicz a montré que l'algèbre B (construite à partir de A), munie de la topologie définie par la famille de semi-normes $(\| \ \|)_k$ avec:

$$\|(x_n)_n\|_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}\|x_n\|, \quad (x_n)_n \in B,$$

est une B_0-algèbre dont le radical n'est pas fermé. Donc $(B, (\| \ \|_k)_k)$ n'est pas une a.l.m.c. En fait, puisque la propriété (P) (qui est une propriété algébrique) n'est pas vérifiée, B ne peut être munie d'aucune topologie d'a.l.m.c. complète. Comme la norme $\| \ \|$ est moins fine que $(\| \ \|_k)_k$, B_J n'est pas fermé dans $(B, \| \ \|)$, en particulier B n'est pas semi-simple.

Dans ce qui suit, nous donnons une façon de construire des algèbres normées semi-simples qui ne vérifient pas la propriété (P). Pour cela donnons d'abord le lemme algébrique suivant:

LEMME 1.1. *Soit A une algèbre intègre. Alors l'algèbre $B = A[X]$ des polynômes à coefficients dans A est semi-simple.*

Preuve. Soit $P(X) = a_0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ un élément de B. Supposons que $P(X) \in B_J$, alors $e + P(X)$ est inversible dans B, où e est l'unité de A. Puisque A est intègre on a: $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. D'où $P(X) = a_0 \in A \cap B_J$ et donc $e + a_0X$ est inversible dans B. Par le même raisonnement que précédemment, $P(X) = 0$. ∎

THÉORÈME 1.2. *Il existe des algèbres normées semi-simples qui ne vérifient pas* (P).

Preuve. Soit $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach non semi-simple et intègre (une telle algèbre existe; il suffit de considérer, par exemple, l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à l'algèbre $L^1(\omega)$ à poids radical ω [1, pp. 182,188]). Considérons l'algèbre $B = A[X]$ munie de la norme

$$\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \| = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|.$$

C'est une algèbre normée. Par le lemme précédent, B est semi-simple. Puisque A n'est pas semi-simple, il existe un élément non nul $x \in A_J = \cap\{\ker\chi\colon \chi \in \Gamma_A\}$. D'où $x \in A_J = \cap\{\ker\chi\colon \chi \in \Gamma_B\}$. Par suite $\{0\} \neq \cap\{\ker\chi\colon \chi \in \Gamma_B\}$. ∎

2. EXPRESSION DU SPECTRE

Il est bien connu que si A est une algèbre dont tout idéal maximal est de codimension 1, alors la propriété

$$(\mathrm{P}') \qquad \operatorname{Sp} x = \{\chi(x)\colon \chi \in \Gamma_A\}$$

est vérifiée. La réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, considérons l'exemple suivant: Soit $H(C)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur C. Cette algèbre vérifie (P'). Mais si on considère l'ensemble $I = \{f \in H(C)\colon \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(p) = 0,\ \forall p \geq p_0\}$, alors, c'est un idéal de $H(C)$. Donc il existe un idéal maximal M contenant I. L'idéal M n'est pas de codimension 1. En effet, pour tout $z \in C$, en appliquant le théorème de Mittag-Leffler aux suites $(1,0,0,\dots)$ et $(z,1,2,3,\dots)$, il existe $f \in H(C)$ telle que $f(z) = 1$ et $f(n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Donc $M \neq \{f \in H(C)\colon f(z) = 0\}$, pour tout z de C. Par conséquent $H(C)$ n'est pas spectrale.

Remarque. Il existe des algèbres (même normées) commutatives unitaires dont tout idéal maximal est de codimension 1 et qui ne sont pas spectrales. Pour cela il suffit de considérer l'algèbre $C[X]$ des polynômes à coefficients dans C. Cependant, nous avons la proposition suivante:

PROPOSITION 2.1. *Soit A une algèbre dont le spectre de tout élément est non vide et borné. Alors les assertions suivantes sont équivalents:*

(i) *Tout idéal maximal est de codimension 1.*

(ii) *La propriété* (P′) *est vérifiée.*

(iii) *Le rayon spectral est une semi-norme d'algèbre.*

(iv) A *est spectrale.*

Preuve. Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) sont claires. Montrons que (iv) $\Longrightarrow$ (i). Supposons qu'il existe sur A une semi-norme spectrale p. Soit M un idéal maximal de A. Il est fermé dans l'algèbre semi-normée (A,p) ([4, corollaire 2.4.8]). D'où l'algèbre quotient $A_{/M}$ munie de la topologie quotient est une algèbre normée qui est un corps. Le théorème de Gelfand-Mazur montre que M est de codimension 1. ∎

Remarques. 1) Il existe des algèbres cpmmutatives dont le spectre de tout élément est borné et dans lesquelles le rayon spectral n'est pas une semi-norme (voir [3, exemple 2.8]).

2) Les assertions de la proposition précédante entraînent que Γ_A muni de la topologie faible est compact.

Nous caractérisons maintenant les algèbres normées qui sont des Q-algèbres parmi celles qui vérifient (P′).

PROPOSITION 2.2. *Soit* $(A, \| \, \|)$ *une algèbre normée telle que la propriété* (P′) *est vérifiée. Alors* A *est une* Q*-algèbre si et seulement si tout caractère est continu.*

Preuve. Il suffit de montrer la condition suffisante. Supposons que tout caractère de A est continu. Donc pour tout $\chi \in \Gamma_A$, on a $|\chi(x)| \leq \|x\|$, pour tout x de A. Comme (P′) est verifiée, $\rho(x) \leq \|x\|$, pour tout x de A. D'où A est une Q-algèbre ([6]). ∎

Remarque. Nous n'avons pas d'exemple d'algèbre normée dont tout caractère est continu et qui n'est pas une Q-algèbre. Ceci nous amène à la question suivante:

QUESTION 1. Une algèbre normée dont tout caractère est continu est-elle une Q-algèbre?

Plus généralement, nous ne savons pas répondre à la question suivante:

QUESTION 2. Une algèbre normée dont tout caractère est continu est-elle spectralement bornée (i.e. le spectre de tout élément est borné)?

Une autre question intéressante posée par l'arbitre est la suivante:

QUESTION 3. Peut-on trouver une algèbre vérifiant (P) mais ne vérifiant pas (P′)?

Donnons maintenant quelques applications de la proposition 2.2.

COROLLAIRE 2.3. *Sur l'algèbre $H(C)$, il n'existe aucune norme d'algèbre plus fine que la topologie τ de la convergence uniforme sur les parties compactes de C.*

Preuve. Du fait que tous les caractères de cette algèbre sont continus pour τ et qu'elle ne peut être munie d'aucune structure de Q-algèbre normée, à cause de l'existence des idéaux maximaux de codimension infinie. ∎

COROLLAIRE 2.4. *Dans l'algèbre $C[X]$ des polynômes à coefficients complexes, il n'existe aucune norme d'algèbre rendant continus tous les caractères.*

Preuve. L'algèbre $C[X]$ contient des éléments dont le spectre est non borné. Donc il n'existe aucune structure de Q-algèbre normée sur cette algèbre. Comme (P′) est vérifiée, on a le résultat par la proposition précédente. ∎

On rappelle qu'un poids est une application W de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant: $W(n+m) \leq W(n)W(m)$, pour tous n, m dans $\mathbb{N}$.

COROLLAIRE 2.5. *Il n'existe aucun poids W satisfaisant l'inegalité suivante $W(n) \geq n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Supposons qu'un tel poids existe. Sur $C[X]$, on considère la norme d'algèbre

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| W(n).$$

Pour cette norme, tout caractère est continu. En effet, tout caractère de $C[X]$ est de la forme δ_z, $z \in C$, $\delta_z(P) = P(z)$, pour tout $P \in C[X]$. Soient $z \in C$ et $P(X) = \sum a_n X^n \in C[X]$, on a $|\delta_z(P)| = |\sum a_n z^n| \leq e^{|z|}\|P\|$, pour tout $P \in C[X]$. Ce qui contredit le corollaire précédent. ∎

Remerciements

Je remercie les Professeurs M. Akkar de l'Université de Bordeaux et M. Oudadess de l'E.N.S. Takaddoum de Rabat pour leur aide précieuse. Je suis également redevable à l'arbitre pour de nombreuses références et des suggestions qui on permis d'améliorer la première version de ce papier, en particulier la proposition 2.1 qui était à l'origine donnée dans le cas normé.

Références

[1] Dales, H.G., "Convolution Algebras on the Real Line", Lecture Notes in Math., Vol. 975, Springer-Verlag, 1983.

[2] Michael, E.A., "Locally Multiplicatively Convex Topological Algebras", Mem. Amer. Math. Soc., N$^{\underline{o}}$ 11, Providence, 1952.

[3] Palmer, T.W., Spectral algebras, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **22**(1) (1992), 293–327.

[4] Palmer, T.W., "Banach Algebras and the General Theory of *-algebras. Vol. 1. Algebras and Banach Algebras." Encyclopedia of Mathematics and its Applications 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[5] Rolewicz, S., Some remarks on radicals in commutative B_0-algebras, *Bull. Acad. Polonaise Sc. Math. Astr. Phys.*, **15** (1967), 153–155.

[6] Yood, B., Homomorphisms on normed algebras, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 373–381.