EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 9, Núm. 3, 168 – 172 (1994)

# Stabilisabilité d'un Système Bilinéaire Fortement Dissipatif

A. BOUNABAT, H. BOUSLOUS AND Y. EL BOUKFAOUI

*Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Sémlalia*
*Univ. Caddi Ayyad, B.P.S. 15, Marrakech, Morocco*

(Presented by Wojciech Okrasinski)

AMS *Subject Class.* (1991): 93D15 *Received May 18, 1994*

## 1. Introduction

Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ séparable, de dimension infinie et dont le produit scalaire et la norme sont notés respectivement par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$.

On considère, sur $H$, le système bilinéaire donné par:

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{dt} = & A\psi + u(B\psi + b)\,, \qquad t \geq 0\,, \\ \psi(0) = & \psi_0\,, \qquad\qquad \psi_0 \in H\,, \end{cases}$$

avec $A$ et $B$ vérifient les hypothèses ci-dessous:

($\mathrm{H}_1$) $A$ opérateur linéaire, fermé de $H$ dans $H$, de domaine dense et il existe $\lambda \geq 0$ tel que $A + \lambda I$ est anti- adjoint.

($\mathrm{H}_2$) $B$ opérateur de $H$ dans $H$ linéaire, borné et anti-adjoint.

Oú $I$ désigne l'identité de $H$.

On suppose que la commande $u$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

*Remarque* 1.1. Sous l'hypothèse ($\mathrm{H}_1$), $D(A) = D(A^*)$ et les opérateurs $A$ et $A^*$ sont fortement dissipatifs.

DÉFINITION 1.1. Une fonction $\psi \in C([0,T],H)$ est une solution faible de (S) si et seulement si pour tout $\varphi \in D(A^*)$ la fonction $\langle\psi(\cdot),\varphi\rangle$ est absolument continue sur $[0,T]$ et

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t),\varphi\rangle = \langle\psi(t),A^*\varphi\rangle + \langle F(\psi(t)),\varphi\rangle\,, \qquad t \in [0,T]\,,$$

où $F(\varphi) = u(B\varphi + b)$.

On montre (cf. [6]) que sous les hypothèses ($\mathrm{H}_1$), ($\mathrm{H}_2$) le système (S) admet une solution faible unique donnée par:

$$\psi(t) = S(t)\psi_0 + \int_0^t S(t-s)F(\psi(s))\,\mathrm{d}s \qquad \forall\, t \in [0,T]\,,$$

où $S(t)$ est le semi-groupe de contraction engendré par $A$.

Soit $T(t)$ le groupe d'isométrie associé à $A + \lambda I$. Alors

$$S(t) = \exp(-\lambda t)T(t) \qquad \text{(cf. [4])}$$

et on montre que $\psi(t) = S(t)\Lambda(t)$, avec

$$\Lambda(t) = \psi_0 + \int_0^t \exp(\lambda s)T(-s)u(s)\big(B\psi(s) + b\big)\,\mathrm{d}s \qquad \forall\, t \in [0,T]\,.$$

Les hypothèses ci-dessus assurent que $\Lambda$ est de classe $C^1$.

Différents travaux ont été élaborés à propos de la stabilisabilité de (S). On peut en citer: [2] dans le cas où $A$ est antiadjoint, [3] pour $A$ dissipatif avec la restriction de la condition initiale dans $D(A)$ et [1] quand $A$ est dissipatif et $B$ est nonlinéaire vérifiant une hypothèse de compacité.

Ce travail fait suite à [2] et [3]. On montre, en utilisant le principe d'invariance de LaSalle [5], que sous une condition de commandabilité (S) est faiblement stable par le feedback $u(t) = -\langle b, \psi(t)\rangle$.

## 2. Problème de Stabilisation

Le principal résultat de cet article est de considérer $u(t) = -\langle b, \psi(t)\rangle$ et d'établir le résultat suivant:

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses* ($\mathrm{H}_1$) *et* ($\mathrm{H}_2$), *si:*

(i) $b \in D((A^*)^k)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$,

(ii) *le sous-espace engendré par* $\{b, A^*b, \dots, (A^*)^k b, \dots\}$ *est dense dans* $H$,

*alors la solution faible* $\psi$ *de* (S) *converge faiblement vers* 0 *quand* $t$ *tend vers l'infini.*

Pour démontrer ce théorème on a besoin des lemmes suivants:

Lemme 2.1. *La solution faible* $\psi$ *de* (S) *est bornée dans* $H$.

*Preuve.* Soit $v(t) = \frac{1}{2}\|\Lambda(t)\|^2$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) &= \langle \Lambda(t), \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}(t)\rangle = -\exp(\lambda t)\langle b, \psi(t)\rangle\langle \Lambda(t), T(-t)(B\psi(t)+b)\rangle \\ &= -\exp(\lambda t)\langle b, \psi(t)\rangle\langle T(t)\Lambda(t), B\psi(t)+b\rangle \\ &= -\exp(2\lambda t)\langle b, \psi(t)\rangle\langle \psi(t), B\psi(t)+b\rangle \\ &= -\exp(2\lambda t)\langle b, \psi(t)\rangle^2 \leq 0\,,\end{aligned}$$

de plus $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Donc $v(t)$ est bornée et l'égalité $\psi(t) = \exp(-\lambda t)T(t)\Lambda(t)$ prouve que $\psi$ est bornée. ∎

LEMME 2.2. $\lim_{t\to\infty}\langle b, \psi(t)\rangle = 0$.

*Preuve.*

$$v(0) - v(t) = \int_0^t \exp(2\lambda s)\langle b, \psi(s)\rangle^2\,\mathrm{d}s \geq \int_0^t \langle b, \psi(s)\rangle^2\,\mathrm{d}s\,.$$

Comme $v(t)$ est bornée alors on a la convergence de $\int_0^\infty \langle b, \psi(s)\rangle^2\,\mathrm{d}s$, et comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle b, \psi(t)\rangle$ est bornée, alors on a le résultat. ∎

Si on définit maintenant l'ensemble $\omega$-limite suivant:

$\Gamma(\psi_0) = \{\psi^* \in H \;:\; \exists(t_n) \to \infty$ avec $\langle \psi(t_n), \varphi\rangle \to \langle \psi^*, \varphi\rangle$ pour tour $\varphi \in H\}$.

On remarque que $\Gamma(\psi_0) \subseteq b^\perp$ (où $b^\perp$ désigne l'orthogonal de $b$) et la démonstration du théorème se limite à prouver que $\Gamma(\psi_0) = \{0\}$.

LEMME 2.3. *$\Gamma(\psi_0)$ est positivement invariant par $S(t)$ pour tout $t \geq 0$.*

*Preuve.* Soit $\psi^* \in \Gamma(\psi_0)$ et $(t_n) \to \infty$ : $\psi(t_n)$ converge faiblement vers $\psi^*$ dans $H$. Soit $t \geq 0$

$$\psi(t+t_n) = S(t)\psi(t_n) - \int_0^t S(t-s)\langle b, \psi(s+t_n)\rangle(B\psi(s+t_n)+b)\,\mathrm{d}s$$

on a

$$\begin{aligned}&|\langle \psi(t+t_n), \varphi\rangle - \langle S(t)\psi^*, \varphi\rangle| \\ &\qquad \leq |\langle \psi(t+t_n), \varphi\rangle - \langle S(t)\psi(t_n), \varphi\rangle| + |\langle S(t)\psi(t_n), \varphi\rangle - \langle S(t)\psi^*, \varphi\rangle|\,.\end{aligned}$$

De plus

$$|\langle \psi(t+t_n), \varphi\rangle - \langle S(t)\psi(t_n), \varphi\rangle| \leq C\int_0^t |\langle b, \psi(s+t_n)\rangle|\,\mathrm{d}s$$

et $|\langle b, \psi(s+t_n)\rangle| \to 0$ quand $n \to \infty$, donc il existe $(s_n) \to \infty$ telle que $\psi(s_n)$ converge faiblement vers $S(t)\psi^*$ dans $H$. ∎

*Démonstration du théorème.* Soit $\psi^* \in \Gamma(\psi_0)$. Par définition on a

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\langle S(t)\psi^*, b\rangle = \langle S(t)\psi^*, (A^*)^m b\rangle = 0 \qquad \forall t \geq 0\,,\ \forall m \in \mathbb{N},$$

donc pour $t = 0$ on aura $\langle \psi^*, (A^*)^m b\rangle = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et par suite $\psi^* = 0$, ce qui prouve que $\Gamma(\psi_0)$ est réduit à $\{0\}$ et par conséquent $\psi(t)$ converge faiblement vers 0 dans $H$ quand $t \to \infty$. ∎

*Remarques* 2.1. (i) Si on prend $\lambda = 0$ dans ce qui précède alors on retrouve [2].
(ii) Nous avons résolu la question posée à la fin de [3] pour les opérateurs $A$ vérifiant $(\mathrm{H}_1)$.

## 3. Exemple

Considérons le système suivant:

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} \dot{\psi}(x,t) & = (\dfrac{\partial}{\partial x} - \lambda I)\psi(x,t) + u(t)\sin(x)\psi(t,-x) + \exp(-\dfrac{x^2}{2}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ \psi(0) & = \psi_0 \end{cases}$$

Soit:

$$\begin{aligned} &H = L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty\}\,, \\ &A = \frac{\partial}{\partial x} - \lambda I\,, \qquad\qquad D(A) = H^1(\mathbb{R}) = \{f \in H\ :\ \frac{\partial f}{\partial x} \in H\}\,, \\ &A^* = -\frac{\partial}{\partial x} - \lambda I\,, \qquad b(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})\,, \\ &B : H \to H \text{ définie par } Bf(x) = \sin(x)f(-x)\ \ (f \in H)\,. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées et donc (S) est stabilisé par

$$u(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})\psi(x,t)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour tout } t \geq 0\,,$$

où $\psi(x,t)$ est la solution faible de (S).

## RÉFÉRENCES

[1] Ball, J.M. and Slemrod, M., Feedback stabilization of distributed semilinear control systems, *Appl. Math. Optim.* **5** (1979), 169–179.

[2] Bounabat, A. and Gauthier, J.P., Weak stabilizability of infinite dimensional nonlinear systems, *Appl. Math. Lett.* **4** (1) (1991), 95–98.

[3] Bouslous, H., Bounabat, A. and Hammouri, H., Stabilisation faible d'un système bilinéaire dissipatif en dimension infinite, *Extracta Math.* **7** (2-3) (1992), 110–113.

[4] Brézis, H., "Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications", Masson, Paris, 1983.

[5] LaSalle, J.P., Stability theory for ordinary differential equations, *Journ. of Diff. Equations* **4** (1968), 57–65.

[6] Pazy, A., "Semi-Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", Springer-Verlag, New York, 1983.