EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 9, Núm. 1, 37 – 41 (1994)

Sur un Problème de Perturbation avec Changement de Type (I)[1]

TAOUFIQ BEN KIRAN

Faculté des Sciences Semlalia, Bd. Moulay Abdellah, B.P.S. 15,
Département de Mathématiques, 40000 *Marrakech, Maroc*

AMS *Subject Class.* (1991): 35B25, 35C20, 42A20 *Received June* 28, 1993

INTRODUCTION

Dans cet article, nous étudions essentiellement le comportement de la solution u_ϵ du problème perturbé:

$$(P_\epsilon)(f) \qquad \begin{cases} -\epsilon\,\Delta u_\epsilon + \partial u_\epsilon/\partial y + u_\epsilon = f & \text{dans } \Omega \\ u_{\epsilon|\Gamma} = 0 & \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

où f est un élèment de l'espace $L^2(\Omega)$ et $\Omega =]0,\pi[\times]0,1[$.

Dans la première partie, nous construisons un développement asymptotique de la solution d'un problème de perturbation en une dimension. Dans la deuxième partie, nous montrons la convergence forte de la solution u_ϵ du problème $(P_\epsilon)(f)$ dans l'espace $L^2(\Omega)$.

Dans tout ce qui suit Ω désigne l'ouvert $]0,\pi[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$. On considère le problème perturbé $(P_\epsilon)(f)$ et on pose:

$$\phi_n(x) = \left[\frac{2}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \sin nx. \tag{1}$$

LEMME 1. *Soit f un élèment de $L^2(\Omega)$ donné par:*

$$f(x,y) = \Sigma_{n\geqslant 1}\, f_n(y)\,\phi_n(x) \;\; ; \;\; \Sigma_{n\geqslant 1}\, \|f_n\|^2_{L^2(]0,1[)} < +\infty. \tag{2}$$

Le problème $(P_\epsilon)(f)$ admet une solution donnée sous la forme:

$$u_g(x,y) = \Sigma_{n\geqslant 1}\, b_{n\epsilon}(y)\,\phi_n(x) \;\; avec \;\; \Sigma_{n\geqslant 1}\, \|b_{n\epsilon}\|^2_{L^2(]0,1[)} < +\infty, \tag{3}$$

où $b_{n\epsilon}$ est la solution du problème:

---

[1] Je dedie ce papier à B. Badr.

$$(p_{n\epsilon}) \qquad \begin{cases} -\epsilon\, b_{n\epsilon}^{(2)} + b_{n\epsilon}^{(1)} + (1+\epsilon n^2)\, b_{n\epsilon} = f_n & 0<y<1 \\ b_{n\epsilon}(0) = b_{n\epsilon}(1) = 0. \end{cases}$$

Preuve. On multiplie l'équation $(P_\epsilon)(f)$ par ϕ_n et on intégre par rapport à x entre 0 et π, on obtient alors:

$$(4) \quad -\epsilon \int_0^\pi \partial^2 u_\epsilon/\partial x^2\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x - \epsilon \int_0^\pi \partial^2 u_\epsilon/\partial y^2\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^\pi \partial u_\epsilon/\partial y\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x + \\ + \int_0^\pi u_\epsilon(x,y)\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x,y)\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

* $$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x,y)\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x = f_n(y).$$

* Après deux intégrations par partie et comme $u_\epsilon(0,y) = u_\epsilon(\pi,y) = 0$, on a:

$$(5) \qquad \int_0^\pi \partial^2 u_\epsilon/\partial x^2\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x = n^2 \int_0^\pi u_\epsilon(x,y)\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x,$$

(car $\phi_n''(x) = -n^2\, \phi_n(x)$).

* $$\int_0^\pi \partial^2 u_\epsilon/\partial y^2\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\int_0^\pi u_\epsilon(x,y)\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x\right].$$

Donc en posant:

$$(6) \qquad b_{n\epsilon}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_\epsilon(x,y)\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x$$

on obtient:

$$(7) \qquad L_\epsilon\, b_{n\epsilon} = -\epsilon\, b_{n\epsilon}^{(2)} + b_{n\epsilon}^{(1)} + (1+\epsilon n^2)\, b_{n\epsilon} = f_n.$$

D'autre part comme $u_\epsilon(x,0) = u_\epsilon(x,1) = 0$, alors:

$$(8) \qquad b_{n\epsilon}(0) = b_{n\epsilon}(1) = 0,$$

i.e., $b_{n\epsilon}$ est la solution du problème $(p_{n\epsilon})$.

Puis on multiplie l'équation (7) par $b_{n\epsilon}$ on intégre par rapport à y entre 0 et 1, on obtient, en tenant compte de (8), alors:

$$(9) \qquad \epsilon\, \|b_{n\epsilon}^{(1)}\|^2_{L^2(]0,1[)} + \|b_{n\epsilon}^{(2)}\|^2_{L^2(]0,1[)} = \int_0^1 b_{n\epsilon}(y) f_n(y)\, \mathrm{d}y.$$

Donc:

$$\|b_{n\epsilon}\|_{L^2(]0,1[)} \leqslant \|f_n\|_{L^2(]0,1[)},$$

par conséquent:

$$\Sigma_{n\geqslant 1} \|b_{n\epsilon}\|_{L^2(]0,1[)} < +\infty. \quad \blacksquare$$

LEMME 2. *La solution $b_{n\epsilon}$ du problème $(p_{n\epsilon})$ converge vers b_{n0} dans $L^2(]0,1[)$ où b_{n0} est la solution du problème:*

$$(l_1) \qquad \begin{cases} b_{n0}^{(1)} + b_{n0} = f_n & 0 < y < 1 \\ b_{n0}(0) = 0. \end{cases}$$

Preuve: Le problème $(p_{n\epsilon})$ est régulier au sens de W. Wason [4, Chp. 10, p. 226], son problème limite est (l_1).

Il y a donc une perte de condition aux limites au voisinage de 1, donc $b_{n\epsilon}$ s'écrit sous la forme:

$$(10) \qquad \begin{aligned} b_{n\epsilon}(y) &= v_n(y,\epsilon) + w_n(y,\epsilon) \\ &= v_n(y,\epsilon) + k_n(y,\epsilon)\exp((y-1)/\epsilon), \end{aligned}$$

w_n étant des fonctions de phénomène des couches limites en 1.

Pour détérminer le développement de v_n, on utilise la relation recurrente exposée par A. Nayfeh [3]:

$$(11) \qquad v_n(y,\epsilon) = v_{n0}(y) + \epsilon v_{n1}(y) + \epsilon^2 v_{n2}(y) + \ldots$$

Reportons ce développement dans $(p_{n\epsilon})$ et groupons les termes en ϵ:

$$(12) \qquad v_{n0}^{(1)} + v_{n0} = f_n$$

&

$$(13) \qquad v_{nk}^{(1)} + v_{nk} = v_{nk-1}^{(2)} - n^2 v_{nk-1} \quad \text{pour } k \geqslant 1.$$

Puis on impose à v_{nk} la condition:

$$(14) \qquad v_{nk}(0) = 0 \quad \text{pour } k \geqslant 0.$$

Pour déterminer w_n, on utilise la méthode introduite par M.I. Visik, L.A. Lyusternik [5]:

$$(15) \qquad w_n(y,\epsilon) = w_{n0}(y,\epsilon) + \epsilon w_{n1}(y,\epsilon) + \epsilon^2 w_{n2}(y,\epsilon) + \ldots$$

w_n n'intervient que près de 1, il est donc naturel de la chercher comme fonction de variable dilatée, on cherchera donc w_{nk}:

$$(16) \qquad w_{nk}(y,\epsilon) = w_{nk}(t) \quad \text{avec } t = (1-y)/\epsilon$$

par ce changement L_ϵ devient:

$$L_\epsilon = -\frac{1}{\epsilon}(\partial^2/\partial t^2 + \partial/\partial t) + \mathrm{I} + \epsilon n^2 \mathrm{I} \tag{17}$$

où I est l'opérateur identité.

On reporte donc le développement de w_n dans:

$$\left[\frac{1}{\epsilon}(\partial^2/\partial t^2 + \partial/\partial t) + \mathrm{I} + \epsilon n^2 \mathrm{I}\right]\left[w_{n0}(t) + \epsilon\, w_{n1}(t) + \epsilon^2 w_{n2}(t) + \ldots\right] = 0 \tag{18}$$

et on regroupe les termes en ϵ:

$$(\partial^2/\partial t^2 + \partial/\partial t) w_{n0} = 0 \tag{19}$$

$$(\partial^2/\partial t^2 + \partial/\partial t) w_{n1} = w_{n0} \tag{20}$$

&

$$(\partial^2/\partial t^2 + \partial/\partial t) w_{nk} = w_{nk\text{-}1} + \epsilon n^2 w_{nk\text{-}2} \quad \text{pour } k \geqslant 2. \tag{21}$$

Pour que u_ϵ vérifie $u_\epsilon(1) = 0$, il faut que:

$$w_{n0}(t)_{t=0} + v_{n0}(1) = 0$$

i.e.

$$w_{n0}(t) = (-v_{n0}(1)) \exp(t) = (-v_{n0}(1)) \exp((y-1)/\epsilon). \tag{22}$$

Par conséquent:

$$b_{n\epsilon} - v_{n0} = w_{n0} + \epsilon(v_{n1} + w_{n1}) + \ldots \tag{23}$$

où v_{n0} est la solution du problème (12) & (14), i.e., le problème (l_1), donc:

$$v_{n0} = b_{n0}. \tag{24}$$

D'autre part, on multiplie l'équation (12) par f_n, on intégre par rapport à y entre 0 et 1, on obtient:

$$\|f_n\|^2_{L^2(]0,1[)} = \|v_{n0}\|^2_{L^2(]0,1[)} + \|v^{(1)}_{n0}\|^2_{L^2(]0,1[)} + (v_{n0}(1))^2. \tag{25}$$

Donc:

$$|v_{n0}(1)| \leqslant \|f_n\|_{L^2(]0,1[)}, \tag{26}$$

ce qui prouve, d'après (23):

$$\|b_{n\epsilon} - v_{n0}\|_{L^2(]0,1[)} \leqslant C\epsilon \|f_n\|_{L^2(]0,1[)} \tag{27}$$

où C est une constante indépendante de ϵ et de n, ce qui donne l'estimation voulue. ∎

THÉORÈME 3. *Pour f un élément de $L^2(\Omega)$, la solution du problème*

$(P_\epsilon)(f)$ *converge dans* $L^2(\Omega)$ *vers la solution* u *du problème:*

$$(L) \qquad \begin{cases} \partial u/\partial y + u = f & \text{dans } \Omega \\ u_{|\gamma} = 0 \end{cases}$$

où $\gamma = \{(x,0);\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.

Preuve. On multiplie l'équation (L) par ϕ_n, on intégre par rapport à x entre 0 et π, on obtient alors:

$$(28) \qquad \partial u_n/\partial y + u_n = f_n \qquad 0 < y < 1;$$

comme $u(x,0) = 0$ alors $u_n(0) = 0$, donc u_n est une solution du problème (l_1), i.e.:

$$(29) \qquad u_n = b_{n0}.$$

En reprenant (27) on obtient alors:

$$(30) \qquad \|b_{n\epsilon} - u_n\|_{L^2(]0,1[)} \leqslant C\epsilon \|f_n\|_{L^2(]0,1[)}.$$

Donc:

$$(31) \qquad \|u_\epsilon - u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\epsilon \left[\Sigma_{n\geqslant 1} \|f_n\|^2_{L^2(]0,1[)}\right]$$

ce qui prouve que u_ϵ converge vers u dans $L^2(\Omega)$, (convergence forte). ∎

Remarque 4. Même pour f assez régulière, on ne peut pas avoir la convergence de u_ϵ vers u dans $H^1(\Omega)$ car u_ϵ est un élèment du fermé $H^1_0(\Omega)$ et u ne l'est pas. ∎

REFERENCES

1. BEN KIRAN, T., Comportement asymptotique d'un problème de perturbation singulière, à paraître dans *Collect. Math.*, 1993.
2. LIONS, J.L., "Perturbation Singulière dans les Problèmes aux Limites et en Controle Optimal", Springer–Verlag, Berlín, 1973
3. NAYFEH, A., "Perturbation Méthods", Wiley, New York, 1973.
4. WASOW, W., "Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations", Wiley, New York (reprinted by Kreiger Publishing Company, Huntington), 1976.
5. VISIK, M.I. AND LYUSTERNIK, L.A., Dégénérescence régulière pour les équations différentielles linéaires avec petit parametre, *Amer. Math. Soc. Transl.* **20**(2) 1962, 239–364.