EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 8, Núm. 2-3, 165 – 169 (1993)

Degré Topologique pour les Fonctions Convexes

HASSAN RIAHI

Faculté des Sciences Sémlalia I, Université Cadi Ayyad, B.P.S. 15, 40000 *Marrakech, Morocco*

AMS *Subject Class.* (1991): 26A51, 55M25. *Received February* 10, 1993

1. INTRODUCTION

L'objet de cette note est de présenter une notion du degré topologique pour les fonctions réelles convexes sci (semicontinue inférieurment) en se basant sur la théorie du degré introduite par F. Browder. Premièrement, on décrit la théorie du degré topologique pour les opérateurs de classe (S_+) introduite et étudiée par F. Browder (voir [6] et [7]), puis on fait le lien entre ces opérateurs et les fonctions convexes par l'intermédiaire des approximées de Moreau–Yosida de leurs sousdifférentiels. La seconde partie de cette étude, Corollaire 2.6, nous a conduit en outre à améliorer des résultats récents de continuation et d'invariance sous homotopies Mosco–épicontinues des problèmes d'optimisation de [2] et [3].

La terminologie et les notions de base sont celles utilisées dans [1], [4] et [7]. Tout d'abord on donne la définition du degré topologique de Leray–Schauder. Soient X et Y deux espaces topologiques, $\mathscr{F}(E,Y)$ une famille d'opérateurs de E dans Y, où $E\subseteq X$, et $\mathscr{H}(E,Y)$ la famille des homotopies dans $\mathscr{F}(E,Y)$.

On considère la famille

$$\mathscr{M}=\{(f,\Omega,y)\,;\,\Omega \text{ ouvert de } X,\ F\in\mathscr{F}(\overline{\Omega},Y) \text{ et } y\notin f(\partial\Omega)\}$$

où $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$ désignent l'adhérence et la frontiére de Ω. Le degré topologique associé à $\mathscr{M}$ est l'application d de $\mathscr{M}$ dans $\mathbb{Z}$ telle que:

(d$_1$) il existe $f_0\colon X\longrightarrow Y$ telle que pour tout Ω et tout $y\in f_0(\Omega)$, $(f_{0|\overline{\Omega}},\Omega,y)\in\mathscr{M}$ et $d(f_0,\Omega,y_0)=1$; et si $d(f,\Omega,y)\neq 0$ pour $(f,\Omega,y)\in\mathscr{M}$ alors $y\in f(\Omega)$;

(d$_2$) si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y\notin f(\overline{\Omega}\backslash\Omega\cup\Omega)$ alors $(f_{|\overline{\Omega}_i},\Omega_i,y)\in\mathscr{M}$ pour $i=1,2$, et

$$d(f,\Omega,y)=d(f,\Omega_1,y)+d(f,\Omega_2,y);$$

(d_3) si $\{(f_t,\Omega,y(t))\,;\, t\in T=[0,1]\}\in \mathscr{H}(\overline{\Omega},Y)$ satisfait $y(\cdot)$ est continue et, pour tout $t\in T$, $y(t)\notin f_t(\partial\Omega)$, alors $d(f_t,\Omega,y(t))$ est indépendant de $t\in T$.

Dans ce qui suit X sera un espace de Hilbert[1] et Y son dual: $Y=X^*=X$.

DÉFINITION 1.1. Une famille d'opérateurs (univoques) demicontinus $\{f_t\colon E\subseteq X\longrightarrow X;\ t\in T\}$ sera dite pseudo-monotone (resp. de classe (S_+)) si elle satisfait:

"pour toute suite $(x_i)_{i\in I}\subseteq E$ et $(t_i)_{i\in I}\subseteq T$ tels que $x_i\xrightarrow{w} x$, $t_i\longrightarrow t$ et $\limsup <f_{t_i}(x_i),x_i-x>\leqslant 0$, alors

$$\lim <f_{t_i}(x_i),x_i-x> =0 \ \text{(resp. } x_i\xrightarrow{s} x\text{);"}$$

si toutefois $x\in E$ alors $f_{t_i}(x_i)\xrightarrow{w} f_t(x)$.

THÉORÈME 1.2. *Soient Ω un ouvert de X, $\mathscr{F}(\overline{\Omega},X)$ la famille des opérateurs de classe (S_+) et $\mathscr{H}$ la classe des homotopies de classe (S_+). Alors il existe une et une seule application degré topologique d satisfaisant* (d_1), (d_2) *et* (d_3) *où l'opérateur de normalisation est l'identité I de X.*

2. DEGRE TOPOLOGIQUE POUR LES FONCTIONS CONVEXES

On se donne une fonction $\phi\colon X\longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Son epigraphe (resp. domaine) est défini par

$$\operatorname{epi}(\phi)=\{(x,\alpha)\in X\times\mathbb{R};\, \phi(x)\leqslant\alpha\}\quad (\text{resp. } \operatorname{dom}(\phi)=\{x\in X\,;\,\phi(x)<+\infty\}).$$

La fonction ϕ sera dite convexe, sci et propre si $\operatorname{epi}(\phi)$ est convexe, fermé et $\operatorname{dom}(\phi)\neq\emptyset$. Pour tout $x\in X$ et tout $\lambda>0$

$$\partial\phi(x)=\{x^*\in X;\,\phi^*(x^*)+\phi(x)=<x^*,x>\}$$

et

$$\partial\phi_\lambda(x)=(\lambda I+\partial\phi^*)^{-1}(x)$$

désignent le sous différentiel et l'approximée Moreau–Yosida de $\partial\phi$. Ici $\phi^*(x^*)=\sup_{x\in X}(<x^*,x>-\phi(x))$ est la fonction conjuguée de ϕ.

DÉFINITION 2.1. Une famille $\{\phi_t\colon X\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\};\ t\in T\}$ sera dite Mosco –épicontinue si pour tout $t_i\longrightarrow t$ dans T on a $\phi=M\text{–}\operatorname{epilim}_{i\in I}\phi_{t_i}$: pour tout $x\in X$

---

[1] On peut supposer que X est un espace de Banach réflexif, et renormer l'espace de tel sorte que X et son dual X^* soient localement uniformément convexes.

i) il existe $x_i \xrightarrow{s} x$ telle que limsup $\phi_{t_i}(x_i) \leqslant \phi(x)$;
ii) si $\xi_i \xrightarrow{w} x$ alors liminf $\phi_{t_i}(\xi_i) \geqslant \phi(x)$.

Les résultats suivants illustrent l'intérêt de la Mosco–épicontinuité pour définir le degré pour les fonctions en s'appuyant sur l'approximée de Moreau–Yosida et le degré de Browder.

PROPOSITION 2.2. *Soit* $\{\phi_t : X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\};\, t\in T\}$ *une famille Mosco–épicontinue de fonctions convexes sci propres. Alors* $\{f_{t,\lambda};\, t\in T$ *et* $\lambda>0\}$, *où* $f_{t,\lambda}=(\partial\phi_t)_\lambda$, *est pseudo–monotone sur* $\overline{\Omega}$ *pour tout ouvert* Ω *de* X.

Preuve. Soient Ω un ouvert de X, $(t_i)_{i\in I}\subseteq T$, $(\lambda_i)_{i\in I}\subseteq]0,+\infty[$ et $(x_i)_{i\in I}\subseteq\overline{\Omega}$ tels que $t_i \longrightarrow t$, $\lambda_i \longrightarrow \lambda>0$, $x_i \xrightarrow{w} x$ et

$$\limsup < f_{t_i,\lambda_i}(x_i),\, x_i - x> \leqslant 0.$$

Posons $y_i = f_{t_i,\lambda_i}(x_i)$ et $z_i = f_{t_i,\lambda}(x)$; alors pour $i\in I$, $y_i\in\partial\phi_{t_i}(x_i-\lambda_i y_i)$ et $z_i\in\partial\phi_{t_i}(x-\lambda z_i)$. De la monotonie de $\partial\phi_{t_i}$ on déduit que

$$<y_i - z_i,\, x_i - x> \geqslant \| y_i - z_i\|^2.$$

Tenant compte de [1, Prop. 3.60 et 3.66] on a $(z_i=(\partial\phi_{t_i})_\lambda(x))_{i\in I}$ converge fortement vers $y=(\partial\phi)_\lambda(x)$. Ainsi, puisque $x_i \xrightarrow{w} x$, on a

$$\limsup \| z_i - y_i\|^2 \leqslant \limsup < f_{t_i,\lambda_i}(x_i),\, x_i - x> - \liminf < z_i,\, x_i - x> \leqslant 0.$$

On déduit que $(y_i)_{i\in I}$ converge fortement vers y et

$$\lim < f_{t_i,\lambda_i}(x_i),\, x - x_i> = 0. \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 2.3. *Sous les hypothèses de la proposition* 2.2, $\{g_{t,\lambda}=(\partial\phi_t)_\lambda + \lambda I;\ \lambda>0$ *et* $t\in T\}$ *est de classe* (S_+).

Preuve. Soient $t_i \longrightarrow t$, $\lambda_i \longrightarrow \lambda$ dans $]0,+\infty[$ et $x_i \xrightarrow{w} x$ telles que limsup $<g_{t_i,\lambda_i}(x_i),\, x_i - x> \leqslant 0$. En posant $y_i = (\partial\phi_{t_i})_{\lambda_i}(x_i)$ on obtient

$$\limsup <y_i,\, x_i - x> \leqslant -\limsup \lambda_i <x_i,\, x_i - x> \leqslant 0.$$

Et puisque $\{f_{t,\lambda};\, t\in T$ et $\lambda>0\}$ est pseudo–monotone, il s'en suit que $\lim <y_i,\, x_i - x> = 0$. Ainsi

$$\limsup \|x_i - x\|^2 \leqslant \limsup <x_i,\, x_i - x> \leqslant -\liminf <y_i,\, x_i - x> = 0.$$

D'où $(x_i)_{i\in I}$ converge fortement vers x dans $\overline{\Omega}$. $\blacksquare$

DÉFINITION 2.4. A présent, on peut définir le degré topologique d'une fonction convexe, sci et propre en zéro[2] par

$$\deg(\phi,\Omega,0)=\lim_{\lambda\to 0^+} d(\partial\phi_\lambda+\lambda I,\Omega,0).$$

Parmi les propriétés intéressantes de ce degré nous énonçons à titre d'illustration les résultats suivants:

THÉORÈME 2.5. *Soient X un espace de Hilbert, $\Gamma_0(X)$ l'ensemble des fonctions convexes sci propres et $\mathscr{H}(\overline{\Omega})$ la famille des homotopies Mosco–épicontinues sur $\overline{\Omega}$, où Ω est un ouvert borné contenant zéro. Alors:*

a) si $\phi_0=\frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ alors $\deg(\phi_0,\Omega,0)=1$;

b) soit $\phi\in\Gamma_0(X)$ telle que $S(\phi)\cap\partial\Omega=\emptyset$ et $\deg(\phi,\Omega,0)\neq 0$, alors $S(\phi)\subset\Omega$;

c) si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $S(\phi)\cap(\overline{\Omega}\setminus\Omega_1\cup\Omega_2)=\emptyset$ alors $\deg(\phi,\Omega,0)=\deg(\phi,\Omega_1,0)+\deg(\phi,\Omega_2,0)$;

d) soit $\{\phi_t;\, t\in T=[0,1]\}\in\mathscr{H}(\overline{\Omega})$ tel que $\forall t\in T$, $S(\phi_t)\cap\partial\Omega=\emptyset$, alors $\deg(\phi_t,\Omega,0)$ est indépendant de t dans T.

On désigne par $S(\phi)$ l'argmin de ϕ, i.e.

$$S(\phi)=\{x\in X;\ \phi(x)=\min_X\phi\}.$$

Preuve. *a)* Pour $\phi_0=\frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ et $\lambda>0$ on a $g_\lambda=(\lambda I+\partial\phi^*)^{-1}+\lambda I=\alpha(\lambda)I$ où $\alpha(\lambda)=(\lambda^2+\lambda+1)/(\lambda+1)$. Donc

$$\deg(\phi_0,\Omega,0)=\lim_{\lambda\to 0} d(g_\lambda,\Omega,0)=\lim_{\lambda\to 0} d(\alpha(\lambda)I,\Omega,0)=1.$$

b) Puisque $\deg(\phi,\Omega,0)\neq 0$, il existe alors $\lambda_0>0$ tel que pour tout $\lambda\in]0,\lambda_0]$ on a $d(g_\lambda,\Omega,0)\neq 0$. D'où, d'après Théorème 1.2 (d_1) et la bornitude de Ω, on déduit l'existence de $\lambda_i\longrightarrow 0$ et $x_i\xrightarrow{w} x$ tels que $x_i\in\Omega$ et $\lambda_i x_i\in\partial\phi((1+\lambda_i^2)x_i)$.

Par suite $0\in\partial\phi(x)$, car $\lambda_i\longrightarrow 0$ et $(1+\lambda_i^2)x_i\xrightarrow{w} x$. Et puisque, d'après Proposition 2.3, la famille $\{g_\lambda;\,\lambda>0\}$ est de classe (S_+), on déduit que $x_i\xrightarrow{s} x\in\overline{\Omega}$.
Or l'ensemble $S(\phi)$ est convexe (donc connexe) et $S(\phi)\cap\partial\Omega=\emptyset$, alors $\emptyset\neq S(\phi)\subset\Omega$.

c) Supposons qu'il existe $\lambda_i\longrightarrow\lambda$ tel que $0\in g_{\lambda_i}(\overline{\Omega}\setminus\Omega_1\cup\Omega_2)$, donc on peut trouver $x_i\in\overline{\Omega}\setminus\Omega_1\cup\Omega_2$ tels que $x_i\xrightarrow{w} x$ et $\lambda_i x_i\in\partial\phi((1+\lambda_i^2)x_i)$. Et comme précédemment on aboutit à $x_i\xrightarrow{s} x\in S(\phi)$ et $x\in\overline{\Omega}\setminus\Omega_1\cup\Omega_2$, car c'est un fermé; ce

[2] Si $y\in\Omega$, le degré de $\phi\in\Gamma_0(X)$ en y, $\deg(\phi,\Omega,y)$, est défini par $\deg(\phi,\Omega,y)=\deg(\phi_y,\Omega-y,0)$ où $\phi_y(x)=\phi(x)-<y,x>$, pour tout $x\in X$.

qui contredit le fait que $S(\phi)\cap(\overline{\Omega}\setminus\Omega_1\cup\Omega_2)=\emptyset$. Ainsi on aura, d'après Théorème 1.2 (d_2), que $d(g_\lambda,\Omega,0)=d(g_\lambda,\Omega_1,0)+d(g_\lambda,\Omega_2,0)$ pour tout λ voisin de 0. Donc par passage à la limite on déduit

$$\deg(\phi,\Omega,0)=\deg(\phi,\Omega_1,0)+\deg(\phi,\Omega_2,0).$$

d) En s'appuyant sur la propriété (d_3) du Théorème 1.2 et la Proposition 2.3, il suffit de vérifier que pour tout $t\in T$ on a l'exsitence de $\lambda(t)>0$ tel que $0\notin g_{t,\lambda}(\partial\Omega)$ pour tout $\lambda\in]0,\lambda(t)]$, où $g_{t,\lambda}=(\lambda I+\partial\phi^*)^{-1}+\lambda I$. Supposons que non; i.e. on peut trouver $t_0\in T$ et $\lambda_i\longrightarrow 0$ tels que pour tout $i\in I$ il existe $u_i\in\partial\Omega$ avec $0=g_{t_0,\lambda_i}(u_i)$ et $u_i\xrightarrow{s}u$ et $0\in\partial\phi_{t_0}(u)$. Donc $u\in\partial\Omega\cap S(\phi_{t_0})$, ce qui est absurde. ∎

Comme conséquence immédiate on obtient une extension des Théorèmes 1.6 et 1.11 de [3] et des Prop. 3.1., Thm. 3.2, Prop. 3.5 et Thm. 3.6 de [2], en retirant la condition de compacité ou celle de Palais–Smale:

COROLLAIRE 2.6. *Soient Ω un ouvert borné non vide et une famille $\{\phi_t;\ t\in T\}\in\mathscr{H}(\overline{\Omega})$ tels que, pour un $t_0\in T$, $\deg(\phi_{t_0},\Omega,0)\neq 0$ et, pour tout $t\in T$, $S(\phi_t)\cap\partial\Omega=\emptyset$. Alors, pour tout $t\in T$, on a $S(\phi_t)\neq\emptyset$ et $S(\phi_t)\subset\Omega$.*

La preuve est immédiate, compte tenu des propriétés (b) et (d) du théorème précédant.

REFERENCES

1. ATTOUCH, H., "Variational convergence for functions and operators", Applicable Math. Series, Pitman, London, 1984.
2. ATTOUCH, H., PENOT, J.P. AND RIAHI, H., The continuation methodes and variational convergence, in "Fixed point theory and applications", M. Théra et J.B. Baillon ed., Pitman Research Notes in Math. Series, London, 1991, 9–32.
3. ATTOUCH, H. AND RIAHI, H., The épi-continuation method for minimization problems. Relation with the degree theory of F. Browder for maximal monotone operators. in "Partial differential equations and the calculus of variations", Vol. I, Colombini et al. ed., Birkhauser, Boston, 1989, 21–58.
4. BREZIS, H., "Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert", Noth-Holland, Amsterdam, 1973.
5. BROWDER, F.E., Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, in "Proceedings of Symposia in Pure Math.", Amer. Math. Soc., Vol. 18(2), 1976.
6. BROWDER, F.E., L'unicité du degré topologique pour les applications de type monotone, *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris* **296** (1983), 145–148.
7. BROWDER, F.E., Fixed point theory and nonlinear problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **9** (1983), 1–39.