EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 7, Núm. 1, 42 – 45 (1992)

Application du Principe Variationnel d'Ekeland à l'Existence d'Optima de Pareto

HASSAN RIAHI

Mathématiques, Université Cadi Ayad, Boulevard Moulay Abdellah
B.P.S. 15 Marrakech, Maroc

AMS *Subject Class.* (1985 Revision): 26B25, 49B21 *Received April* 9, 1992

INTRODUCTION

Le principe variationnel d'Ekeland est un outil qui a fait preuve de beaucoup d'importance en analyse non linéaire, dans laquelle il a joui d'une grande variante d'applications allant de la géométrie des espaces de Banach (c.f. Brezis & Browder [5], Bishop & Phelps [4]) à la théorie de l'optimisation (c.f. Ekeland [7,8]) et du calcul différentiel généralisé (c.f. Aubin [2,3], Penot [10],...) jusqu'au calcul des variations (c.f. Clarke [6], Ekeland [7]) et la théorie des semi-groupes non linéaires (Brezis & Browder [5], Ekeland [7]). Dans cet article, on va aborder un autre aspect d'application du principe variationnel d'Ekeland. On démontrera un résultat d'éxistence en optimisation multiobjective d'optima de Pareto, en s'appuyant sur ce dernier principe variationnel.

1. PRINCIPE VARIATIONNEL D'EKELAND

Il y a plusieurs versions du principe variationnel d'Ekeland, que l'on peut trouver dans [3,7,8]. Nous utiliserons la formulation suivante, encore appelée ϵ-principe variationnel.

THÉORÈME. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $F:X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction semicontinue inférieurement (sci) non identiquement $+\infty$ et minorée sur X. Considérons $x_0 \in X$ et $\epsilon>0$ tels que $F(x_0) \leqslant \inf_X F + \epsilon$. Alors pout tout $\lambda>0$, il existe $x_\lambda \in X$ satisfaisant $F(x_\lambda) \leqslant F(x_0)$, $d(x_\lambda, x_0) \leqslant \lambda$ et pour tout $x \in X$ avec $x \neq x_\lambda$ on a $F(x_\lambda) < F(x) + \frac{\epsilon}{\lambda} \cdot d(x, x_\lambda)$.*

OPTIMISATION MULTIOBJECTIVE

On se donne Y un espace topologique, E un ensemble non vide de Y, et $\{f_i : E \longrightarrow \mathbb{R} : i=1,\ldots,N\}$ une famille de N fonctions réelles définies sur E. On notera par f la fonction vectorielle définie sur E par

$$f(u) = (f_1(u),\ldots,f_N(u)) \quad \forall\, u \in E.$$

La fonction f sera dite semicontinue inférieurement (sci) (respectivement: convexe), si toutes les fonctions f_i sont sci (respectivement: convexes). On dira que $u \in E$ est un optima de Pareto (fort) si le point $f(u) \in f(E) = \{f(v) : v \in E\}$ vérifie:

$$\{f(u) + \mathbb{R}_-^N\} \cap f(E) = \{f(u)\} \tag{1}$$

ou

$$f(u) - f(v) \notin \mathbb{R}_-^N \quad \text{toutefois que } v \in E \text{ et } f(v) \neq f(u). \tag{2}$$

Ici $\mathbb{R}_-^N = \{x=(x_1,\ldots,x_N) : x_i \leqslant 0\}$ est le cône négatif de $\mathbb{R}^N$. Ce dernier sera muni de la norme Euclidienne: $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_N^2)^{\frac{1}{2}}$. Commençons d'abord par montrer les lemmes suivants.

LEMME 1. *Soient x et y deux points distincts de $\mathbb{R}^N$. On a alors l'implication suivante*:

$$\sum_{i=1}^N y_i < \sum_{i=1}^N x_i + \|y-x\| \quad \Rightarrow \quad x - y \notin \mathbb{R}_-^N .$$

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons que $x - y \in \mathbb{R}_-^N$, alors pour tout $i=1,\ldots,N$ on a:

$$x_i - y_i \leqslant 0. \tag{3}$$

D'autre part on a $\sum_{i=1}^N (y_i - x_i) < \|y-x\|$. En élevant au carré les deux termes et développant, on obtient $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}^{i\neq j} (y_i - x_i)(y_j - x_j) < 0$, ce qui contradit (3). ∎

LEMME 2. *Supposons que l'ensemble E est séquentiellement compact et que f est sci, alors l'ensemble $f(E) + \mathbb{R}_+^N$ est fermé.*

Preuve. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $x_n \in f(E) + \mathbb{R}_+^N$. On peut alors trouver un élément $u_n \in E$ tel que

$$x_n - f(u_n) \in \mathbb{R}_+^N . \tag{4}$$

E étant séquentiellement compact, il existe une sous suite $(u_\nu)_{\nu\in M}$ $(M \subset \mathbb{N})$ qui converge vers un point $\bar{u} \in E$. Par semicontinuité inférieure de f on déduit que pour tout $i = 1, \ldots, N$

$$\lim_{\nu \to \infty} \sup f_i(u_\nu) \geqslant f_i(\bar{u}) .$$

Compte tenu de (4), il s'en suit que

$$\bar{x}_i - f_i(\bar{u}) \geqslant \lim_{\nu \to \infty} \inf (\bar{x}_{\nu,i} - f_i(u_i)) \geqslant 0 .$$

D'où $\bar{x} \in f(E) + \mathbb{R}_+^N$. Ainsi on montre que $f(E) + \mathbb{R}_+^N$ est fermé. ∎

LEMME 2 BIS. *Si maintenant E est fermé non vide et f est sci et séquentiellement inf-compacte (i.e. chaque composante f_i a ses tranches de niveau séquentiellement compactes). Alors $f(E) + \mathbb{R}_+^N$ est aussi fermé.*

La démonstration est identique à celle du Lemme 2. Il suffit toutefois de remarquer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ avec $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors l'inf-compacité de f nous donne la relative compacité de (u_n).

Remarque. De la même manière on peut aussi établir la convexité de l'ensemble $f(E) + \mathbb{R}_+^N$, sous la condition que les f_i soient convexes. On peut maintenant démontrer le résultat principal de cet article.

THÉORÈME 3. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction vectorielle sci définie sur un ensemble E séquentiellement compact. Alors pour tout $u_0 \in E$, il existe $\bar{u} \in E$ un optima de Pareto vérifiant*

$$f(\bar{u}) - f(u_0) \in \mathbb{R}_-^N . \tag{5}$$

Preuve. Considérons la fonction F définie sur $\mathbb{R}^N$ par

$$F(x) = \begin{cases} l(x) = \sum_{i=1}^N x_i & \text{si } x \in D_0 \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où

$$D_0 = (f(u_0) + \mathbb{R}_-^N) \cap (f(E) + \mathbb{R}_+^N) .$$

D'après le Lemme 2, l'ensemble D_0 est fermé non vide; par suite F est sci et non identiquement $+\infty$. D'autre part on a les inégalités suivantes:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} F(x) = \inf_{x \in D_0} l(x) \geqslant \inf_{x \in f(E) + \mathbb{R}_+^N} l(x) \geqslant \sum_{i=1}^N (\inf_{u \in E} f_i(u)) ,$$

d'où l'on déduit, puisque f est sci, E séquentiellement compact, que $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} F(x) > -\infty$.

a) Supposons que $l(x_0) = \inf_{D_0} l$, avec $x_0 = f(u_0)$, alors pour tout $x \in D_0$ et vérifiant $x \neq x_0$ on a:

$$l(x - x_0) + \|x_0 - x\| > l(x - x_0) \geqslant 0. \tag{6}$$

b) Supposons maintenant que $l(x_0) > \inf_{D_0} l$, et prenons $\epsilon = l(x_0) - \inf_{D_0} l$ alors $l(x_0) \leqslant \inf_{D_0} l + \epsilon$, soit que

$$F(x_0) \leqslant \inf_{x \in \mathbb{R}^N} F(x) + \epsilon.$$

Utilisons le principe variationnel d'Ekeland avec $\lambda = \epsilon$, il existe $\bar{x} \in D_0$ tel que

$$F(\bar{x}) < F(x) + \|\bar{x} - x\| \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^N \text{ et } x \neq \bar{x}.$$

Ainsi on a $\bar{x} - f(u_0) \in \mathbb{R}^N_-$ (par définition de D_0) et par suite

$$l(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\| > 0 \qquad \forall\ x \in D_0 \text{ et } x \neq \bar{x}. \tag{7}$$

Revenons au Lemme 2, de (6) avec $\bar{x} = x_0$, et (7) on déduit que tout point $\bar{u} \in E$, vérifiant $f(\bar{u}) = \bar{x}$, est un optima de Pareto qui satisfait la relation (5). ∎

En tenant compte du Lemme 2 Bis, on peut obtenir la même conclusion en supposant seulement que E est fermé non vide, mais en exigeant que f soit séquentiellement inf–compacte.

REFERENCES

1. ATTOUCH, H. AND RIAHI, H., Stability results for Ekeland's variational principle, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, Exposé 6, 1988.
2. AUBIN, J.P., Lipshitz behavior of solutions to convex minimization problems, *Math. Oper. Res.* **9**, 1 (1984), 87–111.
3. AUBIN, J.P. AND EKELAND, I., "Applied nonlinear analysis", Wiley–Interscience, New York, 1984.
4. BISHOP, E. AND PHELPS, R.R., "The support functional of convex set. Convexity", Klee ed., Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 9, A. M. S., Providence, R.I., 1963.
5. BREZIS, H AND BROWDER, F., A general ordering principle in nonlinear functional analysis, *Adv. in Math.* **21** (1976), 355–364.
6. CLARKE, F.H., "Optimization and nonsmooth analysis", Wiley–Interscience, New York, 1983.
7. EKELAND, I., Non convex minimization problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **1**, 3 (1979), 443–474.
8. EKELAND, I., On the variational principle, *J. Math. Anal. Appl.* **47** (1974), 323–353.
9. PENOT, J.P. AND STERNA–KURWAT, A., Parametrized multicriteria optimization: Continuity and closedness of optimal multifunctions, *J. Math. Anal. Appl.* **120**, 11 (1986), 150–168.
10. PENOT, J.P., The drop theorem, the petal theorem and the Ekeland's variational principle, *Nonlin. Anal. Math. Appl.* **10**, 9 (1986), 813–822.
11. RIAHI, H., "Quelques résultats de stabilité en analyse épigraphique: Approche topologique et quantitative", These, Montpellier, 1989.