EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 7, Núm. 1, 20 – 24 (1992)

Caractérisation d'un Espace Préhilbertien au Moyen des Orthogonalités Généralisées

BRAHIM BOUSSOUIS

Dépt. des Maths., Fac. des Sciences, Univ. Mohamed ben Abdallah, B.P. 1796 *(Fès–Atlas), Fès, Maroc*

AMS *Subject Class.* (1980): 46B20 *Received January* 27, 1992

DÉFINITONS ET NOTATIONS

DÉFINITION 1. Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel normé de dimension $\geqslant 2$ et soit $(u,v)\in E^2$. On dit que:

i) u est orthogonal à v au sens d'Alonso (ou au sens de l'aire), ce que l'on notera par $u \perp^{\mathrm{A}} v$, si et seulement si: ou bien $\|u\|\cdot\|v\|=0$ ou bien $\{u,v\}$ est un système libre et $u,v,-u,-v$ partagent la boule unité du plan qu'ils engendrent (identifié à $\mathbb{R}^2$) en quatre parties de même aire (cf. [1]).

ii) u est orthogonal à v au sens de Birkhoff, ce que l'on notera par $u \perp^{\mathrm{B}} v$, si et seulement si: $\|u\|\leqslant\|u+\lambda v\|$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ (cf. [6]).

iii) u est orthogonal à v au sens de Carlsson, ce que l'on notera par $u \perp^{\mathrm{C}} v$, si et seulement si: $\Sigma_{1\leqslant k\leqslant m}\, a_k\|b_k u+c_k v\|^2=0$, où a_k,b_k,c_k sont des réels tels que $\Sigma_{1\leqslant k\leqslant m}\, a_k b_k^2=\Sigma_{1\leqslant k\leqslant m}\, a_k c_k^2=0$ et $\Sigma_{1\leqslant k\leqslant m}\, a_k b_k c_k=1$ (cf. [7]).

L'orthogonalité isocéle $\perp^{\mathrm{I}}$ et l'orthogonalité de Pythagore $\perp^{\mathrm{P}}$ étudiées par James dans [10] sont deux cas particuliers de l'orthogonalité $\perp^{\mathrm{C}}$. Elles correspondent respectivement à: $m=2$; $a_1=-a_2=2$; $b_1=b_2=1/2$; $c_1=-c_2=1/2$ et à $m=3$; $a_1=-a_2=-a_3=1$; $b_1=b_2=1$ et $b_3=0$; $c_1=c_3=1$ et $c_2=0$.

iv) u est orthogonal à v au sens de Dimminie, ce que l'on notera par $u \perp^{\mathrm{D}} v$, si et seulement si: $\sup\{f(u)g(v)-f(v)g(u)\,/\,f,g\in S'\}=\|u\|\cdot\|v\|$ où S' est la sphère unité du dual topologique de E (cf. [9]).

v) u est orthogonal à v au sens de Singer, ce que l'on notera par $u \perp^{\mathrm{S}} v$, si et seulement si: ou bien $\|u\|\cdot\|v\|=0$ ou bien $\left\|\frac{u}{\|u\|}+\frac{v}{\|v\|}\right\|=\left\|\frac{u}{\|u\|}-\frac{v}{\|v\|}\right\|$ (cf. [12]).

INTRODUCTION

Dans un espace préhilbertien toutes les relations définies ci–dessus coincident avec l'orthogonalité usuelle (d'où l'appellation d'orthogonalités généralisées qu'on leur donne). En revanche, dans un espace normé quelconque ces relations cessent d'être équivalentes en général, et plusieurs caractérisations des espaces préhilbertiens sont basées sur le fait qu'une orthogonalité généralisée pouvait en entraîner une autre (cf. [1] et [3]). Ainsi a–t–on le résultat suivant:

THÉORÈME 1. ([1],[4],[5]) *E est préhilbertien si et seulement si l'une des implications suivantes est vraie:*

$$\perp^{\mathrm{X}} \Rightarrow \perp^{\mathrm{Y}}$$

où $\mathrm{X} \in \{\mathrm{A,B,D,S}\}$ *et* $\mathrm{Y} \in \{\mathrm{I,P}\}$.

Le but de cet article est de généraliser ce résultat en établissant la conjecture suivante dûe à J. Alonso et à C. Benítez [3]: E est préhilbertien si et seulement si $\perp^{\mathrm{X}} \Rightarrow \perp^{\mathrm{C}}$ où $\mathrm{X} \in \{\mathrm{A,B,D,S}\}$.

A cette fin nous généralisons d'abord les théorèmes 5.3, 6.3 et 6.4 de [7], qui sont énoncés pour des fonctions de classe C^1, aux fonctions primitives de fonctions reglées. Ensuite nous démontrons cette autre conjecture (qui entraîne la première) de [3, p. 126]: E est préhilbertien si et seulement si pour tout plan $P \subset E$ et pour tout $u \in P$, il existe $v \in P-\{0\}$ tel que $u \perp^{\mathrm{C}} \lambda v$ pour tout λ réel.

PRÉLIMINAIRES

LEMME 2. ([7], lemmes 4.1 et 4.2, p. 305) *Soit P un plan vectoriel inclus dans E et soit $C=\{u \in P/\|u\|=1\}$. On a alors:*

i) $\forall (u,v) \in C^2,\ \|u+\lambda v\|^2 = \lambda^2 + \mathrm{O}(\lambda)$ *pour* $|\lambda| \longrightarrow \infty$.

ii) Il existe une partie D dense dans C telle que si $u \in D$ et $v \in C$ sont tels que $u \perp^{\mathrm{B}} v$, alors $\|u+\lambda v\|^2 = 1 + \mathrm{O}(\lambda^2)$ *pour* $|\lambda| \longrightarrow 0$.

Soit maintenant $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et soient $d_1,\ldots,d_N$ et $\alpha_1 < \ldots < \alpha_N$ des réels et $h(t) = \Sigma_{1<\mu<N}\, d_\mu e^{t\alpha_\mu}$. Dans [7], S.O. Carlsson a démontré une condition suffisante pour que f soit développable en F–série relativement à h, (cf. [7], définition 5.1, p. 307 pour la définition de F–série). Son résultat peut être généralisé de la manière suivante:

LEMME 3. ([7], théorème 5.3) *Si f est la primitive d'une fonction réglée sur $[\alpha_1,\alpha_N]$, alors la F–série de f rélativement à h converge vers f sur $]\alpha_1,\alpha_N[$.*

PREUVE. Il suffit de reprendre la démonstration de [7] et de constater:
– D'une part que la formule d'integration par parties: $\int_a^b (gh') = [gh]_a^b - \int_a^b (g'h)$, est valable non seulement pour g et h de classe C^1 mais aussi pour g et h

primitives de fonctions réglées ([8, proposition 8.7.5, p. 158]).
– D'autre part que f' est bornée sur tout $[a,b] \subseteq]\alpha_1, \alpha_N[$ car f' est réglée. ∎

Maintenant en utilisant le lemme 3 ci–dessus et en suivant de près la méthode de Carlsson dans [7], on peut démontrer le résultat suivant:

LEMME 4. ([7], théorèmes 6.3 et 6.4) *Soit* φ *une primitive de fonction réglée telle que:* $\Sigma_{1<\mu<r} p_\mu\, \varphi(\lambda q_\mu) = C_1 + \lambda^2 C_2$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ *où* $C_1 = \Sigma_{1<\mu<r} p_\mu$, $C_2 = \Sigma_{1<\mu<r} p_\mu q_\mu^2$, $\Sigma_{1<\mu<r} p_\mu q_\mu = 1$ *et* $q_\mu \neq 0$, $\mu = 1,\ldots,r$. *Si* φ *admet le comportement asymptotique suivant:*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + O(\lambda) \text{ pour } |\lambda| \longrightarrow \infty \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda) = 1 + O(\lambda^2) \text{ pour } |\lambda| \longrightarrow 0,$$

alors elle est nécessairement paire.

RÉSULTATS PRINCIPAUX

Voici à présent les principaux résultats auxquels on aboutit:

LEMME 5. *Si* $(u,v) \in E^2$ *est tel que* $u \perp^{C} \lambda v$ *pour tout* λ *réel, alors* $u \perp^{B} v$.

PREUVE. Posons

$$F(\lambda) = \Sigma_{1<k<m}\, a_k \|b_k u + \lambda c_k v\|^2 , \quad G = \{k \,/\, 1 \leqslant k \leqslant m \text{ et } b_k c_k > 0\} ,$$
$$p = \Sigma_{k \in G}\, a_k b_k c_k \quad \text{et} \quad q = 1 - p.$$

F admet une dérivée à droite en 0, soit $F_+(0)$, et moyennant un calcul élémentaire on obtient: $F_+(0) = 2\|u\|(pN_+(u,v) + qN_-(u,v))$, où $N_+(u,v)$ et $N_-(u,v)$ désignent respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche en 0 de la fonction convexe $\lambda \longmapsto \|u + \lambda v\|$.

Par hypothèse on a: $F_+(0) = 0$, soit en écartant le cas trivial où $u = 0$:

$$pN_+(u,v) + qN_-(u,v) = 0. \tag{1}$$

En changeant v en $-v$ et en remarquant que $N_-(u,-v) = -N_+(u,v)$ on obtient:

$$qN_+(u,v) + pN_-(u,v) = 0. \tag{2}$$

De (1) et (2) on déduit que: $N_-(u,v) \leqslant 0 \leqslant N_+(u,v)$ (en fait $N_-(u,v) = N_+(u,v) = 0$ si $p \neq q$ et $N_-(u,v) = -N_+(u,v)$ si $p = q$) et par conséquent la fonction convexe $\lambda \longmapsto \|u + \lambda v\|$ admet un minimum en 0, autrement dit $u \perp^{B} v$. ∎

THÉORÈME 6. *Si pour tout plan* P *inclus dans* E *et pour tout* $u \in P$, *il existe* $v \in P - \{0\}$ *tel que* $u \perp^{C} \lambda v$ *pour tout* λ *réel, alors l'espace* E *est préhilbertien.*

PREUVE. Soit P un plan vectoriel inclus dans E et soit $u \in P$. On va d'abord démontrer l'existence de $v \in P-\{0\}$ tel que $\|u+\lambda v\|=\|u-\lambda v\|$ pour tout λ réel. On ne perd pas en généralité en supposant $\|u\|=1$. Soient D la partie dense dans $C=\{x\in P/\ \|u\|=1\}$ donnée par le lemme 2 et $\varphi(\lambda)=\|u+\lambda v\|^2$.

1) Si $u\in D$:

On dispose de $v\in P-\{0\}$, qu'on peut supposer de norme $=1$ tel que $u \perp^{\mathrm{C}} \lambda v$ pour tout λ réel. Par le lemme 5 on a également $u \perp^{\mathrm{B}} v$ et donc $\varphi(\lambda)=1+\mathrm{O}(\lambda^2)$ pour $\lambda\to 0$ et $\varphi(\lambda)=\lambda^2+\mathrm{O}(\lambda)$ pour $|\lambda|\longrightarrow\infty$ (cf. lemme 2). Par ailleurs le fait que $u \perp^{\mathrm{C}} \lambda v$ se traduit par: $\Sigma_{1<k<m} a_k \|b_k u+\lambda c_k v\|^2=0$, ou encore en changeant de notations:

$$\Sigma_{1<j<r} p_j\ \varphi(\lambda q_j)=C_1+\lambda^2 C_2,$$

où $C_1=\Sigma_{1<j<r} p_j$, $C_2=\Sigma_{1<j<r} p_j q_j^2$, $\Sigma_{1<j<r} p_j q_j=1$ *et* $q_j\neq 0$, $j=1,\dots,r$.

Mais la fonction φ est convexe, donc elle est dérivable sauf peut–être en dehors d'un ensemble dénombrable; de plus elle est partout dérivable à droite et sa dérivée à droite φ_+ admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche (cf. [11], T 7,bis, p. 56). En résumé φ est une primitive de la fonction réglée φ_+.

Enfin d'après le lemme 4, φ est paire et par conséquent $\|u+\lambda v\|=\|u-\lambda v\|$ pour tout λ réel.

2) Si $u\in C$ quelconque:

D étant dense dans C, il existe $(u_n)\in D$ telle que $\lim\|u_n-u\|=0$. D'après le 1) pour chaque entier n il existe $v_n\in C$ tel que $\|u_n+\lambda v_n\|=\|u_n-\lambda v_n\|$ pour tout λ. Comme $(C,\|\cdot\|)$ est compact, il existe une sous–suite $(v_{n'})$ de (v_n) qui converge vers un élément v de C. En passant à la limite $(n'\longrightarrow\infty)$ dans $\|u_{n'}+\lambda v_{n'}\|=\|u_{n'}-\lambda v_{n'}\|$, on obtient $\|u+\lambda v\|=\|u-\lambda v\|$ pour tout λ réel.

En résumé, pour tout plan vectoriel $P\subset E$ et pour tout $u\in P$, il existe $v\in P-\{0\}$, tel que pour tout λ on ait $\|u+\lambda v\|=\|u-\lambda v\|$. Par conséquent E est préhilbertien d'aprés [10, corollaire 4.7]. ∎

COROLLAIRE 7. *Si l'une des orthogonalités* $\perp^{\mathrm{A}}$, $\perp^{\mathrm{B}}$, $\perp^{\mathrm{D}}$ *et* $\perp^{\mathrm{S}}$ *entraîne l'orthogonalité* $\perp^{\mathrm{C}}$, *alors* E *est préhilbertien.*

PREUVE. Chacune des orthogonalités $\perp^{\mathrm{A}}$, $\perp^{\mathrm{B}}$, $\perp^{\mathrm{D}}$ et $\perp^{\mathrm{S}}$ est à la fois existante et homogène (voir [2. p. 13]), donc pour tout plan P inclus dans E et pour tout $u\in P$, il existe $v\in P-\{0\}$, tel que $u \perp^{\mathrm{X}} \lambda v$ pour tout λ réel, où $\mathrm{X}\in\{\mathrm{A,B,D,S}\}$. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 6 pour conclure. ∎

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude au Professeur J. Alonso d'avoir mis à ma disposition la bibliographie nécessaire à cet article et pour m'avoir aidé par correspondance dans sa préparation.

Références

1. ALONSO, J., "Ortogonalidad en Espacios Normados", Ph. D. Thesis, Publ. Dpto. Matem. Univ. Extremadura, Badajoz (Spain), 1984.
2. ALONSO, J., AND BENÍTEZ, C., Orthogonality in normed linear spaces: a survey, Part I: Main properties, *Extracta Mathematicae* **3** (1988), 1–15.
3. ALONSO, J., AND BENÍTEZ, C., Orthogonality in normed linear spaces: a survey, Part II: Relations between main orthogonalities, *Extracta Mathematicae* **4** (1989), 121–131.
4. ALONSO, J., AND BENÍTEZ, C., Complements on Dimminie orthogonality, à paraître.
5. ALONSO, J., AND BENÍTEZ, C., Area orthogonality in normed linear spaces, à paraître.
6. BIRKHOFF, G., Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.* **1** (1935), 169–172.
7. CARLSSON, S.O., Orthogonality in normed linear spaces, *Arkiv. für Math.* **4** (1962), 297–318.
8. DIEUDONNÉ, J., "Fondements de l'Analyse Moderne", Gauthiers–Villards, París, 1965.
9. DIMMINIE, C.R., A new orthogonality relation in normed linear spaces, *Math. Nach.* **114** (1983), 197–203.
10. JAMES, R.C., Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Math. J.* **12** (1945) 291–301.
11. SCHWARTZ, L., "Analyse Hilbertienne", Hermann, París, 1979.
12. SINGER, I., Unghiuri abstracte si functii trigonometrice in spatii Banach, *Bull. Sti. Acad. R.P.R., Sect. Sti. Math. Fiz.* **9** (1957), 29–42.