EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 6, Núms. 2 y 3, 160 – 162 (1991)

Remarque sur l'Unicité Trajectorielle des E.D.S.

YOUSSEF OUKNINE

Département de Mathématique, Fac. des Sciences, Univ. Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc

AMS *Subject Class.* (1980): 60H10, 60J60 *Received February* 26, 1991

Pour certaines equations différentielles stochastiques réelles qui ni possédent pas l'unicité trajectorielle, nous montrons qu'il y a unicité trajectorielle de certaines fonctions de solutions.

Considérons l'e.d.s.

$$\mathrm{d}X_t = \operatorname{sgn}(X_t)\,\mathrm{d}B_t, \quad (X_0 = 0), \ \operatorname{sgn}(x) = 1_{x>0} - 1_{x<0}. \tag{*}$$

Si X est une solution il en est de même de $-X$, et $X \neq 0$ donc il n'y a pas d'unicité trajectorielle pour cette e.d.s. Cependant nous allons prouver qu'il y a unicité trajectorielle de la valeur absolue des solutions.

PROPOSITION. *Soient X^1 et X^2 deux solutions de (*) relativement au même brownien B. Alors on a $|X_t^1| = |X_t^2|$.*

Preuve. Par la formule de Tanaka, il vient que:

$$|X_t| = B_t + L_t^0(X) = B_t + \tfrac{1}{2} L_t^0(|X|)$$

et il est bien connu que cette e.d.s. posséde la proprieté d'unicité trajectorielle. ∎

Plus géneralement, si b est une fonction borelienne localement bornée impaire, on considère l'e.d.s.

$$X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s. \tag{**}$$

THÉORÈME. *Il y a unicité trajectorielle de la valeur absolue des solutions de l'e.d.s. (**).*

Démonstration. Par la formule de Tanaka et le fait que b est impaire on a:

$$|X_t| = B_t + \int_0^t b(|X_s|)\,\mathrm{d}s + L_t^0(X)$$

$$|X_t| = B_t + \int_0^t b(|X_s|)\,\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2} L_t^0(|X|).$$

Considérons l'e.d.s.

$$\begin{cases} Y_t = B_t + \int_0^t b(Y_s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2} L_t^0(Y) \\ Y_t \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette e.d.s. posséde l'unicité en loi car (**) la posséde, de même si Y_1 et Y_2 sont deux solutions on a:

$$L_t^0(Y_1 - Y_2) = 0.$$

Nous allons montrer que le sup de deux solutions est également solution.

$$Y_1 \vee Y_2 = Y_1 + (Y_2 - Y_1)^+ = \int_0^t 1_{Y_2 > Y_1}\,\mathrm{d}Y_2 + \int_0^t 1_{Y_2 \leqslant Y_1}\,\mathrm{d}Y_1 =$$

$$B_t + \int_0^t b(Y_1 \vee Y_2)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left[\int_0^t 1_{Y_2 > Y_1}\,\mathrm{d}L_2^0(Y_2) + \int_0^t 1_{Y_2 \leqslant Y_1}\,\mathrm{d}L_2^0(Y_1)\right]$$

en utilisant le théorem 2 de Ouknine [2]. On voit que $Y_1 \vee Y_2$ est solution de d'e.d.s., il en est de même de $Y_1 \wedge Y_2$.

Quitte à arrêter en un temps d'arrêt convenable on peut supposer que $Y_1 + Y_2 \leqslant N$. Il en resulte donc d'aprés l'unicité en loi que

$$\mathrm{E}\,|Y_1 - Y_2| = \mathrm{E}(Y_1 \vee Y_2 - Y_1 \wedge Y_2) = 0$$

d'où $Y_1 = Y_2$ et par suite $|X^1| = |X^2|$. ∎

Si X^1 et X^2 vérifie l'e.d.s. (**), l'imparité des fonctions $x \longmapsto \mathrm{sgn}(x)$ et $x \longmapsto b(x)$ jouent un rôle important pour l'unicité de la valeur absolue. Récement M. T. Barlow a montré que l'e.d.s. $\mathrm{d}X_t = (a 1_{X>0} - b 1_{X \leqslant 0})\,\mathrm{d}B_t$ ne posséde pas la propriété d'unicité trajectorielle. Cependant nous avons le résultat suivant: soient X^1 et X^2 deux solution de l'e.d.s.

$$X_t = \int_0^t (a 1_{X>0} - b 1_{X \leqslant 0})\,\mathrm{d}B_2,\ a>0,\ b>0 \text{ et } a \neq b, \qquad (***)$$

relativement au même brownien B.

THÉORÈM. *Soient X^1 et X^2 deux solutions de (***) et*

$$F(x) = a^{-1}x^+ + b^{-1}x^-.$$

Alors $F(X_t^1) = F(X_t^2)$ p.s.

La preuve de ce résultat est analogue aux précédentes et utilise la remarque suivante:

Remarque. Si X et Y sont deux semimartingales positives continues et $X \cdot Y = 0$, alors

$$L_t^0(X+Y) = L_t^0(X) + L_t^0(Y).$$

RÉFÉRENCES

1. M. T. BARLOW, Skew brownien motion and a one dimensional stochastic differential equation, *Stochastics* **25** (1989), 1–2.
2. Y. OUKNINE, Temps local du produit et du sup de deux semimartingales, in "Seminaires de Probabilités XXIV", Lect. Notes in Math., Vol. 1426, Berlin, 1990.