EXTRACTA MATHEMATICAE 5, n.3, 141-143 (1990)

SUR UNE CONJECTURE DE JACOBSON.

Hassane ESSANNOUNI et Amine KAIDI
Departement de Mathématiques et d'Informatique
Faculté des Sciences
Université Mohammed V
B.P. 1014. RABAT (MAROC).

A.M.S. Class.1980. 17C05

ABSTRACT

Let J be a Jordan algebra with 1. A subalgebra B of J is said to be full if $1 \in B$ and for any b in B with b invertible in J, $b^{-1} \in B$. We prove that if J is nondegenerate then any full subalgebra of J generated by two elements is special. It follows that any rational identity in two indeterminates satisfied in all special Jordan algebras is also satisfied in all nondegenerate Jordan algebras.

1- Le théorème de Shirshov-Cohn [2; p.48] affirme que dans une algèbre de Jordan (avec 1) toute sous-algèbre engendrée par deux éléments (et 1) est speciale. Aussi dans [2 ; p.425] Jacobson conjecture que la sous-algèbre d'une algèbre de Jordan J avec 1, engendrée par 1, $a,b,a_1,\ldots,a_n$ est spéciale où a,b sont deux éléments quelconques de J et $a_1,\ldots,a_n$ des éléments inversibles de J de telle sorte que $a_1^{-1} = P_1(a,b)$, $a_2^{-1} = P_2(a,b,a_1),\ldots, a_n^{-1} = P_n(a,b,a_1,\ldots,a_{n-1})$ avec $P_i = P_i(x,y,x_1,\ldots,x_{i-1})$ $(i=1,\ldots,n)$ des polynômes de Jordan arbitraires.

Une sous-algèbre B d'une algèbre de Jordan J avec 1 est dite pleine si $1 \in B$ et pour tout $b \in B$ avec b inversible dans J, $b^{-1} \in B$. La sous-algèbre pleine engendrée par un sous-ensemble M de J est la plus petite sous-algèbre pleine de J contenant M. Il a été démontré dans [4] que la sous-algèbre pleine engendrée par un seul élément est associative commutative. Puisque une algèbre de Jordan J est spéciale si et seulement si toute sous-algèbre de J engndrée par un nombre fini d'éléments est spéciale [2 ;p.72], la conjecture de Jacobson peut être formulée de la façon suivante :

Dans une algèbre de Jordan J avec 1 toute sous-algèbre pleine
(*) engendrée par deux éléments est spéciale.

D'une part ce résultat constitue une généralisation de théorème de Shirshov-Cohn et d'autre part il peut être utilisé pour établir dans les algèbres de Jordan des identités rationnelles en deux idéterminées en les vérifiant pour les algèbres de Jordan spéciales. Il sera aussi une généralisation du théorème de McCrimmon [5], et peut être utilisé pour démontrer le théorème 1 dans [1].

Dans cette note nous prouvons que (*) est vraie si on prend J non-dégenerée. Il s'enseuit alors que toute identité rationnelle en deux indéterminées valable dans toute algèbre de Jordan spéciale est aussi valable dans toute algèbre de Jordan non-dégenerée.

2- Dans ce qui suit J désigne une algèbre de Jordan avec 1 sur un corps K de caractéristique $\neq 2$. On a le théorème suivant :

Théorème. Si J est non-dégenerée et $a,b \in J$ alors la sous-algèbre pleine engendrée par a et b est spéciale.

La démonstration de ce théorème utilise les résultats suivants :

(1) Le théorème est vrai si J est un anneau d'Albert.

(2) Le théorème est vrai si J est semi-primitive puisque toute algèbre primitive est première non dégenerée et d'après le théorème de structure de Zel'manov [7] elle est spéciale ou un anneau d'Albert

(3) D'après un résultat de Martindale et McCrimmon [3] J peut être plongée dans une algèbre semi-primitive J' et J,J' ont le même 1.

Corollaire. Si une identité rationnelle en deux indéterminées est valable dans toute algèbre de Jordan spéciale alors elle est valable dans toute algèbre de Jordan non-dégenerée.

Remarque. Soit J une algèbre de Jordan et M(J) le radical de Mc Crimmon de J. M(J) est le plus petit idéal de J pour lequel $J/_{M(J)}$ est non-dégenerée. Soit f(x,y) une "expression" rationnelle en deux indéterminées x,y . Supposons que f(x,y) est identiquement nulle dans toute
algèbre de Jordan spéciale . Soit $a,b \in J$ tels que f(a,b) a un sens alors $f(a,b) \in M(J)$ et comme M(J) est un nil-idéal [6] alors en particulier il existe un entier $n \geq 1$ tel que $(f(a,b))^n = O$.

REFERENCES

[1] H.Essannouni, P. Jimenez Garijo, A. Kaidi and A.Rodriguez Palacios. "Rational identities in Jordan algebras". Algebras Groups Geom. 5 (1988) , 411-42O.

[ ]] N. Jacobson. "Structure and representations of Jordan algebras". Amer. Math.Soc. Coll. Publ. 39. Providence, Rhode island, 1968.

[3] W.S. Martindale and K.McCrimmon. "Imbedding nondegenerate Jordan algebras in semi primitive algebras" Proc.Am. Math. Soc. 1O3, N°4 (1988), 1O31-1O36.

[4] J. Martinez Moreno. "Sobre algebras de Jordan normadas completas". Tesis doctoral, Univ. de Granada (1977).

[5] K. McCrimmon. "Macdonald's théoreme. with inverses". Pacific J. Math. 21 (1967), 315-325.

[6] K.McCrimmon. "The radical of Jordan algebras". Proc.Nat. Acad.Sci. U.S.A. 62, N°4, (1969) ; 671-678.

[7] E.Zel'manov. "On prime Jordan algebras II." Siberian Math.J. 24 (1983).