EXTRACTA MATHEMATICAE 5, n.2, 80-82 (1990)

COHOMOLOGIE D'UNE W*-ALGEBRE

PAR Ali ALAMI-IDRISSI

AMS 1980 Subject
Classification : 46L05

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B.P. 1014 RABAT (MAROC)

Soient A une algèbre de Banach, X un A-bimodule de Banach. Pour tout entier $n \geq 0$ on note $C_c^n(A,X)$ l'espace de Banach des applications multilinéaires continues de A^n dans X ; en particulier $C_c^o(A,X) = X$. Pour tout entier $n \geq 0$ on note Δ_n l'application linéaire continue de $C_c^n(A,X)$ dans $C_c^{n+1}(A,X)$ définie par

$$\Delta_n \rho(x_1,\dots,x_{n+1}) = x_1.\rho(x_2,\dots,x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \rho(x_1,\dots,x_i x_{i+1},\dots,x_{n+1}) + (-1)^{n+1}\rho(x_1,\dots,x_n).x_{n+1}$$

avec $\rho \in C_c^n(A,X)$, $x_i \in A$, pour $i = 1,\dots,n+1$.
en particulier pour $x \in X$ on a :

$$\Delta_o x(a) = a.x - x.a \,,\ a \in A$$

On a $\Delta_{n+1} \circ \Delta_n = 0$; on pose, pour $n > 0$, $Z_c^n(A,X) = \ker \Delta_n$ et $B_c^n(A,X) = \operatorname{Im} \Delta_{n-1}$ enfin pour $n > 0$, $H_c^n(A) = Z_c^n(A,X) / B_c^n(A,X)$ désigne le nième groupe de la cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans X .

Si A est une C* algèbre unitaire, U(A) désigne le groupe unitaire de A ; $U(A) = \{ u \in A \mid u^*u = uu^* = 1 \}$.

Notons $M\,C^0(A,X) = X$. Pour $n > 0$, posons :

$Mc^n(A,X) = \{ \rho \in C_c^n(A,X) \mid \rho(x_1,\dots,x_n) = 0$ si l'une des variables x_i vaut 1, $i \in [1,n] \}$

Pour $\rho \in MZ^n(A,X)$ et $u \in U(A)$, posons :

$$f_u(\xi)(x_1,\dots,x_{n-1}) = (-1)^n \left[\rho(x_1,\dots,x_{n-1},u) - \Delta\xi(x_1,\dots,x_{n-1},u) \right] u^* + \xi(x_1,\dots,x_{n-1})$$

avec $\xi \in C_c^{n-1}(A,X)$.

Nous avons alors, le théorème suivant :

Théorème 1.
i) $(MC^n(A,X))_{n\in\mathbb{N}}$ est un sous-complexe du complexe de Hochschild $(C_c^n(A,X))_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Pour $n \geq 1$ nous avons :

$$Z_c^n(A,X) = B_c^n(A,X) + MZ^n(A,X)$$

iii) La famille $(fu)_{u\in U(A)}$ est un groupe distal de transformations affines et continues sur $MC^{n-1}(A,X)$.

Le théorème suivant généralise le théorème 4.1 d'Haagerup [4] et le théorème 3.2 de Bunce et Paschke [2].

Théorème 2 :
Soient M et N deux W*algèbres avec M contenue dans N et $1_M = 1_N$. Alors toute dérivation δ de M dans le prédual N_* de N est intérieure c'est à dire qu'il existe $\psi \in N_*$ tel que :

$$\delta(x) = x.\psi - \psi.x \ , \ x \in M, \text{ et } \|\psi\| \leq \|\delta\|$$

En particulier $H^1(M,N_*) = \{o\}$.

La démonstration se fait en étudiant le cas où N est finie puis le cas où M est proprement infinie.

Corollaire 3.
Soit A une sous-C*algèbre unitaire d'une W*algèbre M, alors $H^1(A,M_*) = O$.

Théorème 4.
Soit M une W*algèbre à prédual M_* séparable, alors pour tout entier $n \geq 1$ $H_c^n(M,M_*)$ est réduit à O.

Nous ramenons le problème à une recherche d'un point fixe par la famille $(f_u)_{u \in U(M)}$, introduite dans le théorème 1.

L'utilisation du théorème du point fixe de Ryll-Nardzewski [6] se réalise à l'aide du critère de compacité faible dans l'espace $MC^{n-1}(M,M_*)$ [1], en distinguant les cas finies et proprement infinies.

Le théorème suivant résoud le problème de la trivialité du second groupe d'une W^*algèbre de prédual séparable, confirmant le résultat partiel de Johnson [5].

Théorème 5.
Soit M une W^*algèbre à prédual séparable, alors $H_c^2\ (M,M) = \{O\}$.

Nous traitons d'abord le cas où M est finie puis proprement infinie, en utilisant le théorème du point fixe de Ryll-Nardzewski et un critère de compacité faible dans l'espace de Banach $C_c^1\ (M,M)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Alami-Idrissi.A : Formes multilinéaires dans les W^*algèbres (to appear in Extracta Math)

[2] Bunce.J.W et Paschke.W.L : Derivations on a C^*algebra and its double. J. Functional Analysis,37 (198O), 235-247.

[3] Dunford.N et Schwartz.J : Linear operators I. New-York interscience (1958).

[4] Haagerup.U : All nuclear C^* algebras are amenable. Inventiones Math. 74, (1983), 3O5-319.

[5] Johnson.B.E : A classe of II1 factors without property P but with zero second cohomology, Archiv. for Mathematik 12, (1974), 153-159.

[6] Namioka.S et Asplund.E : A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem. Bull.Amer. Math. Soc. 73, (1967), 443-445.