EXTRACTA MATHEMATICAE 5, n.2, 77-79 (1990)

FORMES MULTILINEAIRES DANS LES W* ALGEBRES

PAR Ali ALAMI-IDRISSI

AMS 1980 Subject Classification : 46L05

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B.P. 1014 RABAT (MAROC)

L'inégalité de Grothendieck-Pisier-Haagerup dans sa version "algèbres de Von Neumann" [2, proposition 2.3] n'est pas généralisable aux formes trilinéaires.

Neanmoins la proposition suivante permet d'avoir la continuité sequentielle par rapport à la topologie ultra-forte * de toute forme multilinéaire séparément ultra-faiblement continue.

Proposition 1.

Soient k un entier naturel ≥ 2 , $M_1,\ldots,M_k$ des algèbres de Von Neumann.

Soient V une forme k-linéaire sur $M_1 \times \ldots \times M_k$ séparément ultra-faible-

ment continue, $(x_n^j)_{n\in \mathbb{N}}$ $(j \in \{1,2,\ldots,k-1\})$ une suite d'éléments de M_j convergeant ultra-fortement * vers O, et (x_n^k) une suite bornée de M_k. Alors nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} V(x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^{k-1}, x_n^k) = 0$$

En particulier V est globalement séquentiellement ultra-fortement *, continue.

La démonstration se fait par récurrence sur k, en utilisant l'inégalité généralisée de Grothendieck pour k = 2.

Soient $M_1,\dots,M_k$ une suite finie d'algèbres de Von Neumann. Considérons l'espace de Banach $\beta_s(\Pi_{j=1}^k M_j)$ des formes k-linéaires sur $\Pi_{j=1}^k M_j$ qui sont séparément ultra-faiblement continues.

Le théorème suivant fournit un critère de compacité faible dans $\beta_s(\Pi_{j=1}^k M_j)$

Théorème 2.

Soient $M_1,\dots,M_k$ des algèbres de Von Neumann de genre dénombrable [3].

Soit K une partie de $\beta_s(\Pi_{j=1}^k M_j)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) K est faiblement relativement compact dans $\beta_s(\Pi_{j=1}^k M_j)$

2) Pour tout $j \in [1,k]$, soit A_j, une sous algèbre * abélienne et maximale

de Mj, alors $K \mid \Pi_{j=1}^k A_j$ est faiblement relativement compact dans

$\beta_s(\Pi_{j=1}^k A_j)$.

3) K est bornée , de plus nous avons :

pour tout indice $j \in [1,k]$, soit $(p^j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de projecteurs de l'algèbre M_j dont la borne inférieure est nulle.

alors :

$$\lim_{n\to+\infty} V(p^1_n,\dots,p^k_n) = O$$

et ce uniformément par rapport à $V \in K$.

4)K est bornée, de plus nous avons :

pour tout $j \in [1,k]$, il existe une forme positive et normale ω_j sur M_j telle que : pour tout $\varepsilon > O$ il existe $\delta > O$ tel que si $a_j \in M_j$ avec

$$||a_j|| < 1 \text{ et } \omega_j [(a_j)^* a_j+a_j(a_j)^*] < \delta \; (j \in [1,k])$$

alors $| V(a_1,...,a_j,...,a_k) | < \varepsilon$ pour tout $V \in K$.

La démonstration du théorème 3 se fait à l'aide du théorème d'Eberlein-Smulian [1] et du lemme suivant :

Lemme 3.

Soit (V_n) une suite faiblement convergente dans $\beta_s(\Pi_{j=1}^k M_j)$ Soit $(a^1{}_n,...,a^k{}_n)$ une suite de k-uplets de $\Pi_{j=1}^k M_j$ ultra-fortement * convergente vers O, alors nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} V_m(a^1{}_n,...,a^k{}_n) = O$$

et ce uniformément par rapport à $m \in \mathbb{N}$

Bibliographie

[1] Dunford.N et Schwartz.J : Linear operators I, Interscience. New-York 1958.

[2] Haagerup.U : The Grothendieck inequality for bilinear forms on C* algebras, Adv.in. Math 56 (93-116). 1985

[3] Takesaki, Theory of operator algebras. I, Springer-Verlag 1979.