EXTRACTA MATHEMATICAE 4, n.3, 133-135 (1989)

Ecuaciones en Derivadas Parciales con perturbaciones estocásticas

Tomás Caraballo Garrido

Dpto. de Análisis Matemático. Facultad de Matemáticas (Universidad de Sevilla). Apartado de correos 1.160. 41080–Sevilla

Clasificación A.M.S.: 60H, 35K.

El objetivo de este trabajo es analizar cómo se comportan las soluciones de una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) ante la presencia de determinadas perturbaciones aleatorias. Es decir, si las soluciones de una EDP son estables (en algún sentido), ¿cómo han de ser las perturbaciones para que la ecuación siga teniendo las soluciones estables?

La importancia del estudio de estas EDP estocásticas está en que intervienen, como es bien sabido, en la modelización de numerosos fenómenos con origen en Física (fenómenos de difusión), Biología (problemas de genética de poblaciones), Química, etc... Más aun, con frecuencia, en estas ecuaciones aparecen funciones de retardo, debido a que, al estudiar la evolución en el tiempo de un fenómeno regido por ecuaciones diferenciales, en lo que va a suceder en un determinado instante influye lo que ya ha ocurrido anteriormente, es decir, la historia del proceso.

La situación en la que vamos a trabajar es la siguiente:

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ una base de procesos estocásticos, i.e. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es una familia creciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ y continua por la derecha; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad completo y $\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos P-despreciables de $\mathcal{F}$. Sea w_t un proceso de Wiener real normalizado y adaptado a F_t. De otro lado, si X es un espacio de Hilbert separable y $h, T \geq 0$ denotamos por $I^2(-h,T;X)$ al subespacio cerrado (y por tanto completo) del espacio de Hilbert $L^2(\Omega \times [-h,T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([-h,T]), dP \otimes dt; X)$, formado por aquellos procesos que son adaptados a $\mathcal{F}_t$, donde $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$ si $t < 0$. Asimismo, suponemos bien conocida la teoría de integración estocástica (véanse, por ejemplo, Caraballo [1], Real [5] y Pardoux [4]).

Sean V y H dos espacios de Hilbert reales separables con normas $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ respectivamente. Suponemos que $V \hookrightarrow H$, i.e. V está contenido en H con inclusión continua y densa (con constante de inyección igual a 1). Identificando H y su dual H', se tiene $V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$. Por último denotaremos por $< \cdot, \cdot >$ el producto de dualidad V', V.

Dados los operadores lineales continuos A, B, C tales que $A \in \mathcal{L}(V,V')$, B, $C \in \mathcal{L}(V,H)$, las funciones (de retardo), $\rho(\cdot)$, $\tau(\cdot)$ verificando que ρ, $\tau \in C^1([0,+\infty); \mathbb{R})$; $\exists h > 0$: $-h \leq \rho(t), \tau(t) \leq t$, $\rho'(t), \tau'(t) \geq 1$ $\forall t \geq 0$, y el dato inicial $\psi \in I^2(-h,0;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,0;H))$ (donde por $L^2(\Omega; C(-h,0;H))$ denotamos el espacio $L^2(\Omega, \mathcal{F}, dP; C(-h,0;H))$), se verifica (véase Real [5]) que bajo la hipótesis de coercividad:

(c1) $$\exists \nu \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \ -2 < Ax, x > +\nu|x|^2 \geq \varepsilon\|x\|^2 + |Cx|^2, \quad \forall x \in V,$$

existe un único proceso $(x_t)_{t\geq -h}$ que es solución del siguiente problema:

(1) $$\begin{cases} x_t \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T:H)) \quad \forall T \geq 0 \\ x_t = \psi(0) + \int_0^t (Ax_s + Bx_{\tau(s)})\, ds + \int_0^t Cx_{\rho(s)}\, dw_s\,, \quad P - c.s., \quad \forall t \geq 0 \\ x_t = \psi(t)\,, \quad t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Es usual escribir la ecuación de este problema en términos de diferenciales estocásticas como

(1*) $$dx_t = (Ax_t + Bx_{\tau(t)})\, dt + Cx_{\rho(t)}\, dw_t \quad \forall t \geq 0.$$

En el caso particular en que $C \in \mathcal{L}(H)$, la condición $(c1)$ se puede relajar a

(c2) $$\exists \nu \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \ -2 < Ax, x > +\nu|x|^2 \geq \varepsilon\|x\|^2, \quad \forall x \in V.$$

En esta situación, vamos a establecer condiciones suficientes para obtener estabilidad asintótica exponencial de las trayectorias del proceso solución de (1). Previo a ello, se obtienen condiciones suficientes de estabilidad exponencial para el segundo momento de dicho proceso solución siempre que B, C sean "pequeños".

TEOREMA 1.– *Sea x_t la solución de (1). Se verifican:*

i) *Si* $\exists \alpha > 1 : \quad -2 < Ax, x > \geq \alpha|x|^2 + |Bx|^2 + |Cx|^2, \quad \forall x \in V$,

entonces la solución de (1) satisface:

(2) $\exists \lambda, K > 0 : \ E|x_t|^2 \leq K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t} \ \forall t \geq 0$, *con* $\|\psi\|_1^2 = \max\{E\|\psi(0)\|^2, \int_{-h}^0 E\|\psi(s)\|^2\, ds\}$.

ii) *Si* $B, C \in \mathcal{L}(H)$ *y se verifican (c2), (H_1) y (H_2), donde*

(H_1) $\qquad \exists \gamma, \delta > 0 : \quad |U_t| \leq \delta e^{-\gamma t}, \ \forall t \geq 0$ *(aquí $|\cdot|$ es la norma de $\mathcal{L}(H)$),*

(H_2) $\qquad \exists m, l > 0 : \quad (1 + \frac{1}{l} + m)\frac{\delta^2}{\gamma^2}|B|^2 + (1 + \frac{1}{m})\frac{\delta^2}{2\gamma}|C|^2 < 1$,

entonces también se verifica (2).

Demostración. i) Aplicar la fórmula de Itô al proceso $e^{\lambda t}|x_t|^2$ (véase Caraballo [1]).

ii) Por ser $\rho'(t) \geq 1$ y $\tau'(t) \geq 1$ $\forall t \geq 0$, existen dos constantes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\rho^{-1}(t) \leq t + k_1$, $\tau^{-1}(t) \leq t + k_2$, $\forall t \geq 0$. De otro lado, es conocido (véase Dautray–Lions [3]) que el operador A genera un semigrupo de operadores $(U_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(H)$ de clase c_0 y por tanto (véase Chojnowska–Michalik [3]) la solución de (1) coincide con la solución generalizada asociada, es decir,

$$x_t = U_t\psi(0) + \int_0^t U_{t-s}Bx_{\tau(s)}\, ds + \int_0^t U_{t-s}Cx_{\tau(s)}\, dw_s \quad P - c.s. \ \forall t \geq 0. \tag{3}$$

Veremos que existen K_1, $\lambda > 0$ tales que $\int_0^\infty e^{\lambda t}E|x_t|^2\, dt \leq K_1\|\psi\|_1^2$. Tomemos $\lambda > 0$ tal que $0 < \lambda < \gamma$ y $u(\lambda) = (1 + m^{-1})\frac{|C|^2\delta^2 e^{\lambda k_1}}{2\gamma - \lambda} + (1 + l^{-1} + m)\frac{|B|^2\delta^2 e^{\lambda k_2}}{\gamma(\gamma-\lambda)} < 1$ (lo cual es posible gracias a H_2)), y denotemos por $I(\lambda)$ la integral $\int_0^\infty e^{\lambda t}E|x_t|^2\, dt$. De (3) se sigue

$$\begin{aligned} I(\lambda) \leq (1 + l)\int_0^\infty e^{\lambda t}E|U_t\psi(0)|^2\, dt + (1 + l^{-1} + m)\int_0^\infty e^{\lambda t}E\left|\int_0^t U_{t-s}Bx_{\tau(s)}\, ds\right|^2 dt \\ + (1 + m^{-1})\int_0^\infty e^{\lambda t}E\left|\int_0^t U_{t-s}Cx_{\rho(s)}\, dw_s\right|^2 dt. \end{aligned} \tag{4}$$

De (H_1) se deducen:

$$(1 + l)\int_0^\infty e^{\lambda t}E|U_t\psi(0)|^2\, dt \leq c_1(1 + l)\|\psi\|_1^2, \tag{5}$$

$$(1 + m^{-1})\int_0^\infty e^{\lambda t}E|\int_0^t U_{t-s}Cx_{\rho(s)}\, dw_s|^2\, dt \leq (1 + m^{-1})\frac{|C|^2\delta^2}{2\gamma - \lambda}[e^{\lambda k_1}\|\psi\|_1^2 + e^{\lambda k_1}I(\lambda)], \tag{6}$$

y

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}E|\int_0^t U_{t-s}Bx_{\tau(s)}\, ds|^2\, dt \leq \frac{|B|^2\delta^2 e^{\lambda k_2}}{\gamma(\gamma - \lambda)}[\|\psi\|_1^2 + I(\lambda). \tag{7}$$

Utilizando (5)–(7), la expresión (4) se convierte en

$$I(\lambda) \leq c_2\|\psi\|_1^2 + u(\lambda)I(\lambda), \tag{8}$$

y de la elección de λ, existe $K_1 > 0$ tal que $I(\lambda) \leq K_1\|\psi\|_1^2$.

De la fórmula de Itô, (c2) y la estimación anterior se deduce (2). ∎

Finalmente, de (2) se obtiene la estabilidad trayectorial:

TEOREMA 2.– ([1]) *Si la solución x_t de (1) satisface (2), entonces existen $\alpha, \beta > 0$ y existe $\Lambda \subset \Omega$ con $P(\Lambda) = 0$ tal que*

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \Lambda \quad \exists T(\omega) \in \mathbb{R} : \quad |x_t(\omega)|^2 \leq \alpha\|\psi\|_1^2 e^{-\beta t} \quad \forall t \geq T(\omega). \ ∎$$

EJEMPLO: Con objeto de ilustrar el resultado anterior consideremos el siguiente ejemplo con origen físico:

Sea una varilla unidimensional de longitud π, cuyos extremos se mantienen a una temperatura de cero grados. Supongamos que en su interior está teniendo lugar una reacción exotérmica siendo la producción de calor en el intante t proporcional a la temperatura que tenía la varilla en el instante anterior $\rho(t) = t - h$ $(h > 0)$. Si $u(t,x)$ denota la temperatura de la varilla en un punto que dista x del extremo considerado como origen y en el instante t, la función u coincide muy aproximadamente con la solución de

$$(PC) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + ru(t,x) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0\,, \ \ \forall t \geq 0\,, \quad u(t,x) = \psi(t,x)\,, \ \ t \in [-h,0]\,, \end{cases}$$

donde r depende del tipo de reacción y ψ es una función conocida. No es difícil comprobar que si $r = r_0$ =constante y satisface que $r_0^2 < -1 - 2a$ (lo cual exige que $a < -1/2$) entonces la solución de (PC) es exponencialmente estable. Sin embargo, suele ocurrir que el tipo de reacción varía de forma aleatoria, es decir, suelen aparecer perturbaciones estocásticas, lo que nos lleva a modelizar el problema de la siguiente forma: suponiendo que $r = r_0 + r_1\dot{w}$ (donde $\dot{w}$ es un ruido blanco, i.e. la derivada estocástica de un proceso de Wiener), entonces la ecuación de (PC) se escribe

$$du(t,x) = \left(-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + r_0 u(t-h,x)\right)\, dt + r_1 u(t-h,x)\, dw_t\,.$$

(Observemos que cuando $r_1 \to 0$ la ecuación se aproxima a la de (PC)).

Tomando (véase Caraballo [1]) $V = H_0^1(0,\pi)$, $H = L^2(0,\pi)$, $A = -a\, d^2/dx^2$, $B = r_0 I$, $C = r_1 I$, $\tau(t) = \rho(t) = t - h$, el problema perturbado ya queda encuadrado en el marco que estamos trabajando. Además $-2 < Au, u >= -2a\|u\|^2$, $|Bu|^2 = r_0^2|u|^2$, $|Cu|^2 = r_1^2|u|^2$, luego aplicando el apartado i) del Teorema anterior, si existe $\alpha > 1$ tal que $-2a \geq \alpha + r_0^2 + r_1^2$, o lo que es lo mismo, $r_0^2 + r_1^2 < -2a - 1$, se tiene estabilidad exponencial para el segundo momento de la solución. Observemos que cuando $r_1 \to 0$ la estimación obtenida es la que teníamos para el caso determinista.

De otro lado, para obtener alguna estimación cuando $0 > a > -1/2$, aplicamos el apartado ii). Resulta que (H_1) se verifica con $\gamma = -a$, $\delta = 1$, y en ese caso (H_2) se escribe

$$(9) \qquad (1 + l^{-1} + m)\frac{r_0^2}{(-a)^2} + (1 + m^{-1})\frac{r_1^2}{-2a} < 1.$$

Esto significa que dado $a < 0$, siempre que las perturbaciones retardadas con coeficientes r_0, r_1 sean pequeñas, en el sentido de que se verifique (9), se propaga el carácter exponencialmente estable de las soluciones del problema determinista al perturbado, lo cual tiene un especial interés desde el punto de vista de las aplicaciones.

Bibliografía

[1] T. Caraballo, Algunos resultados de Estabilidad para Ecuaciones en Derivadas Parciales Estocásticas con retardo, Tesis, Universidad de Sevilla (1988).

[2] A. Chojnowska-Michalik, Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces and Their Applications, Thesis, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences (1976).

[3] R. Dautray and J. L. Lions, Analyse Mathèmatique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques, Masson, Paris (1984).

[4] E. Pardoux, Équations aux Dérivées Partielles Stochastiques non Linéaires Monotones, Thesis, University of Paris XI (1975).

[5] J. Real, Stochastic Partial Differential Equations with Delays, *Stochastics* 8, 2 (1982-83), 81-102.