EXTRACTA MATHEMATICAE 3, n.3, 80-82 (1988)

ECUACION DE LA SUPERFICIE DE KUMMER

José Mª Herrera Muro

Departamento de Matemáticas. Universidad de Salamanca
37008 Salamanca. SPAIN

1980 A.M.S. Subject Classification: 14H40, 14K05, 14K25.

Prólogo.

El presente trabajo expone la obtención de las ecuaciones de la superficie de Kummer a partir de la teoría de las funciones theta (ecuaciones clásicas de Riemann). Para ver otros tratamientos del mismo problema se pueden consultar [1] y [2] en los que se siguen en cada caso procedimientos "ad hoc" para su obtención.

1. La variedad abeliana es intersección de un nº finito de cuádricas.

Sea X una variedad abeliana, X_4 los puntos de 4-torsión de X, L un haz de línea amplio de tipo separable y totalmente simétrico ([1], §1 y §2) y $H(L)=\{\xi \in X : T_\xi^* L \simeq L\}$ donde T_ξ es la traslación en X por ξ.

Si $R_n = \Gamma(X,L^n)$ y $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$, se tienen morfismos naturales $S^n R_1 \xrightarrow{\Phi_n} R_n$, $SR_1 \xrightarrow{\Phi} R$, donde S^n y S denotan el producto simétrico n-ésimo y el álgebra simétrica, respectivamente.

Proposición 1. Si Φ_{2^n} es epiyectivo para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces Φ_n es epiyectivo para $n \gg 0$.

Demostración. [1], §4.

Para cada n se fija una ϑ-estructura $\vartheta_n : G(L^{2^n}) \xrightarrow{\sim} G(2^n\ ) = k^* \times K(2^n\delta) \times \widehat{K(2^n\delta)}$ que induce un morfismo $\beta_n : \Gamma(X,L^{2^n}) \xrightarrow{\sim} V(2^n\delta) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{conj.}}(K(2^n\delta),k)$.

Denotamos $Z_{xy}^{\ell} = \sum_{\ell \in Z_2} \ell(\eta)\delta_{x+y+\eta} \cdot \delta_{x-y+\eta} \in S^2(V(\delta))$, $x,y \in K(2\delta)$ $x+y \in K(\delta)$. Para el resto de las notaciones $(Y_{x,\ell}, \vartheta(x,\ell)$, etc.) nos remitimos a [1].

Proposición 2. $\{Y_{x,\ell}\}$ $x \in K(2\delta)$, $\ell \in \hat{Z}_2$ y $\{Z_{xy}^{\ell}\}$ $x,y \in K(2\delta)$, $x+y \in K(\delta)$, $\ell \in \hat{Z}_2$, generan $V(2\delta)$ y $S^2(V(\delta))$ respectivamente, de modo que si se eligen $\bar{x},\bar{y} \in K(2\delta)$ adecuadamente $\{Y_{\bar{x},\ell}\}$, $\{Z_{\bar{x}\bar{y}}^{\ell}\}$ forman base.

Teorema 1. Si $X_4 \subseteq H(L)$ entonces S^2R_1 genera R_2 .

Demostración. [1], §4.

Corolario. Si $X_4 \subseteq H(L)$, $S^{2^n}R_1$ genera R_{2^n} luego R_m está generado por S^mR_1 para $m \gg 0$; en particular L es muy amplio.

Proposición 3. En la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I_2 \longrightarrow S^2V(\delta) \longrightarrow V(2\delta) \longrightarrow 0$$

los elementos $\{\vartheta(y,\ell)Z^{\ell}_{xu} - \vartheta(u,\ell)Z^{\ell}_{xy}\}$ generan I_2 .

Esta proposición nos da un conjunto finito de cuádricas que se cortan en X .

Pasemos a demostrar que X es intersección de cuádricas.

Si $\Phi_n : X \longrightarrow \mathrm{Proj}\, SH^0(L^n) = \mathbb{P}$ es la inmersión que L^n define $(n \geq 4)$, X^* es la variedad abeliana dual de X y P el haz de línea universal en $X \times X^*$, para cada $\alpha \in X^*$ se tiene el morfismo

$$\begin{array}{ccc} H^0(L^p \otimes P_\alpha) \otimes H^0(L^q \otimes P_{-\alpha}) & \longrightarrow & H^0(L^n) \qquad n = p+q \quad , \quad p,q \geq 2 \\ s \otimes t & \longmapsto & \langle s,t \rangle \end{array}$$

de modo que los elementos $Q^{\alpha}_{s_1 t_1 s_2 t_2} = \langle s_1,t_1\rangle \otimes \langle s_2,t_2\rangle - \langle s_1,t_2\rangle \otimes$ $\otimes \langle s_2,t_1\rangle$ generan en $H^0(L^n) \otimes H^0(L^n)$ el ideal de una intersección de cuádricas que contienen a X en $\mathbb{P}$.

Vía la identificación $\mathbb{P} \leftrightsquigarrow \{$aplicaciones lineales $H^0(L^n) \xrightarrow{\ell} k\}/k^*$ se puede enunciar la siguiente condición

(1) $\left\{ X = \bigcap_{\substack{\alpha \in X^* \\ s_1,t_1,s_2,t_2}} (Q^{\alpha}_{s_1 t_1 s_2 t_2})_0 \right.$ precisamente si dada $\ell \in H^0(L^n)^*$ tal que para cada $\alpha \in X^*$ existen $m_\alpha \in H^0(L^p \otimes P_\alpha)^*$ y $n_\alpha \in H^0(L^q \otimes P_{-\alpha})^*$ con $\ell(\langle s,t\rangle) = m_\alpha(s) n_\alpha(t)$, entonces existe $x \in X$ tal que para toda $s \in H^0(L^n)$ es $\ell(s) = s(x)$.

Universalizando el enunciado (1) en $X \times X^*$ por medio del haz de línea P se concluye utilizando resultados sobre cohomología de variedades abelianas debidos a Kempf y Ramanujam ([3]).

2. Obtención de la ecuación de la superficie de Kummer (K_x).

Sea (X,Θ) una variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión 2, $L = \mathcal{O}_X(2\Theta)$, $V_j = \mathrm{Hom}(K(j),k)$, $j = 2, 4$.

El morfismo inversión $[-1]$ en X induce en V_4 la descomposición $V_4 = V_4^+ \oplus V_4^-$, donde $V_4^+ = \mathrm{Ker}([-1] - \mathrm{Id})$ y $V_4^- = \mathrm{Ker}([-1] + \mathrm{Id})$. La imagen de X en $\mathbb{P}(V_2)$ por el morfismo que L induce compuesta con la inmersión de Veronese en $\mathbb{P}(V_4)$ coincide con sumergir X en $\mathbb{P}(V_4)$ y proyectar, con vértice en V_4^-, a $\mathbb{P}(V_4)$.

Por tanto, las ecuaciones de K_X en $\mathbb{P}(V_2)$ son las de los conos de $\mathbb{P}(V_4)$ que contienen a X con vértice $\mathbb{P}(V_4^-)$, proyectados a $\mathbb{P}(V_4)$ y restringidos a $\mathbb{P}(V_2)$.

Si esta restricción es una cuártica, automáticamente será K_x, que es de grado 4.

Las relaciones obtenidas para el ideal I_2 en el apartado anterior equivalen a las clásicas de Riemann ([1], §3):

$$Y_x Y_y \vartheta(u)\vartheta(v) = \sum_{\xi \in Z_4 \times \hat{Z}_2} A_\xi Y_{x+z+\xi} Y_{y+z+\xi} \vartheta(u+z+\xi)\vartheta(v+z+\xi)$$

Dos de ellas son

$$4y_5^2\vartheta_2^2 = y_5^2\vartheta_2^2 + y_{11}^2\vartheta_3^2 + y_4^2\vartheta_0^2 + y_{10}^2\vartheta_1^2 - y_8^2\vartheta_6^2 - y_{14}^2\vartheta_7^2 + y_2^2\vartheta_5^2 + y_0^2\vartheta_4^2 - y_{13}^2\vartheta_9^2 - y_6^2\vartheta_8^2$$

$$4y_2^2\vartheta_5^2 = y_0^2\vartheta_4^2 + y_{13}^2\vartheta_9^2 - y_6^2\vartheta_8^2 + y_5^2\vartheta_2^2 + y_4^2\vartheta_0^2 - y_{11}^2\vartheta_3^2 - y_{10}^2\vartheta_1^2 + y_{14}^2\vartheta_7^2 - y_8^2\vartheta_6^2 + y_2^2\vartheta_5^2$$

y de ellas se obtiene

$$\vartheta_2^2 y_5^2 + \vartheta_5^2 y_2^2 - \vartheta_0^2 y_4^2 - \vartheta_4^2 y_0^2 + \vartheta_6^2 y_8^2 + \vartheta_8^2 y_6^2 = 0 \text{ en } \mathbb{P}(V_4^+)$$

de donde, restringiéndose a $\mathbb{P}(V_2)$, resulta:

$$(A-B)(x_0^4+x_1^4+x_2^4+x_3^4) + 2(2A^{-1}+A-2B^{-1}-B)(x_0^2x_1^2+x_2^2x_3^2) + 2(2C^{-1}-B)(x_0^2x_3^2+x_1^2x_2^2) -$$

$$- 2(A+B-2C)(x_0^2x_2^2+x_1^2x_3^2) - 8(A^{-1}+B^{-1}-C^{-1}-C)x_o x_1 x_2 x_3 = 0 \quad ,$$

donde $A = (\vartheta_5^2 : \vartheta_2^2)$, $B = (\vartheta_4^2 : \vartheta_0^2)$, $C = (\vartheta_8^2 : \vartheta_6^2)$, y en función de las coordenadas del origen de K_x en $\mathbb{P}(V_2)$, $q_L(e) = (q_0,q_1,q_2,q_3)$, es

$$\vartheta_0^2 = q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 \; ; \quad \vartheta_2^2 = q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 \; ; \quad \vartheta_4^2 = 2(q_0q_1+q_2q_3)$$

$$\vartheta_5^2 = 2(q_0q_1-q_2q_3) \; ; \quad \vartheta_6^2 = 2(q_0q_2+q_1q_3) \; ; \quad \vartheta_8^2 = 2(q_0q_3+q_1q_2)$$

Referencias:

[1] Mumford, D.: "On the equations defining abelian varieties, ", Invent. Math., 1.
[2] Enriques-Chisini: "Teoría Geométrica della equazioni ...", Vol. 4, Ed. Zanichelli.
[3] Kempf, G.: "Cohomology of abelian varieties". Question on algebraic varieties. CIME (1970).