EXTRACTA MATHEMATICAE 1, 38-40 (1986)

ESTRUCTURA DE LAS ALGEBRAS DE JORDAN NO-CONMUTATIVAS PRIMITIVAS NORMADAS QUE CONTIENEN IDEALES INTERNOS MINIMALES

Antonio Férnández López
Departamento de Algebra y Fundamentos.
Facultad de Ciencias. Universidad de Málaga. 29071 MALAGA.

1. En su celebrado libro [1], Bonsall y Duncan determinan la estructura de las álgebras asociativas primitivas normadas complejas que contienen ideales por la derecha minimales. En esta nota, que recoge parte de la ponencia presentada por el autor en el Coloquio de Algebras de Jordan (Montpellier, 1-4 de Septiembre de 1985) [3], se investiga la estructura de las álgebras de Jordan no degeneradas primitivas normadas complejas que contienen ideales internos minimales. En un trabajo anterior del autor [4], conjuntamente con Rodriguez Palacios, se abordaba el estudio del caso algebraico general. No obstante, la versión para álgebras normadas que se presenta aquí puede deducirse por otras técnicas, que permiten una simplificación notable de los argumentos.

2. Sea K un cuerpo. Una K-álgebra (no-asociativa) es un K-espacio vectorial A dotado de una aplicacion K-bilineal $(a,b) \longmapsto ab$ de $A \times A$ en A

Una K-álgebra A es de <u>Jordan</u> <u>no-conmutativa</u> cuando satisface las identidades siguientes:

(i) $(xy)x = x(yx)$, (ii) $(x^2y)x = x^2(yx)$ $x,y \in A$

y se dice que A es de <u>Jordan</u> cuando es conmutativa y satisface (ii).

Sea A una K-álgebra y $\lambda \in K$. Se define la <u>mutación</u> $A^{(\lambda)}$ como la K-álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es el de A y cuyo producto viene dado por: $a._\lambda b = \lambda(ab)+(1-\lambda)(ba)$ $a,b \in A$.

La mutación $A^{(\lambda)}$ de un álgebra de Jordan no-conmutativa A es nuevamente un álgebra de Jordan no-conmutativa. La mutación $A^{(1/2)}$ es claramente Jordan y se denota usualmente por A^+. Una K-álgebra A se dice <u>estrictamente casi-asociativa</u> cuando es la mutación $A = B^{(\lambda)}$ de un álgebra asociativa B.

Dada un álgebra de Jordan no-conmutativa A y $a \in A$, el operador U_a de A en A viene definido por: $U_a x = a(ax+xa)-a^2x = (ax+xa)a-xa^2$, $x \in A$. Un <u>ideal</u> <u>interno</u> es un subespacio vectorial I de A tal que $U_I(A) \subset I$.

Para las demás nociones sobre álgebras de Jordan el lector puede consultar el libro de Jacobson [5], mientras que para las de álgebras de Jordan no-conmutativas lo referimos a [7].

Un álgebra real o compleja se dice <u>normada</u> cuando su espacio vectorial sub yacente posee una norma respecto de la cual el producto del álgebra es continuo. La definición usual de álgebra asociativa normada:

(*) $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ $(a,b \in A)$

no es apropiada para el contexto no-asociativo ya que la mutación sólo conserva la continuidad del producto y no la condición (*).

3. Sea A un álgebra de Jordan no-conmutativa no degenerada ($U_a = 0$ implica $a=0$). Se define el zócalo $S(A)$ de A como la suma de los ideals internos minimales. $S(A)$ es un ideal (bilátero) que es suma directa de ideales simples M de A cada uno de los cuales contiene un idempotente completamente primitivo e ($U_e A$ es un álgebra de Jordan no-conmutativa de division) [4]. Si A es asociativa semiprima entonces esta definición de zócalo es coherente con la usual para álgebras asociativas, y lo mismo es cierto para los casos de un álgebra alternativa [9] y de un álgebra de Jordan [8].

Un ideal interno modular-maximal de un álgebra de Jordan no-conmutativa A es por definición uno de A^+ [6]. Si I es un ideal interno modular-maximal de A se define el corazón de I, $K(I)$, como el más grande ideal de A contenido en I. A se denomina primitiva si posee un ideal interno modular-maximal I tal que $K(I)=0$.

TEOREMA: *Toda algebra de Jordan no-conmutativa no degenerada primitiva normada compleja con zócalo no nulo responde a uno de los tipos siguientes:*

(i) El cuerpo de los números complejos.

(ii) Un álgebra $A=\mathbb{C} \oplus V$ de producto $(\alpha + x)(\beta + y) = \alpha\beta + (x \mid y) + \alpha y + \beta x + x \wedge y$ donde $(\ \mid\ )$ es una forma bilineal simétrica no degenerada continua sobre un espacio vectorial normado complejo V y $\wedge$ es un producto anticonmutativo continuo en V que satisface $(x \wedge y \mid x) = 0$, $x, y \in V$.

(iii) Un álgebra de Jordan (conmutativa) primitiva normada compleja con zócalo no nulo.

(iv) Un álgebra estrictamente casi-asociativa $A = B^{(\lambda)}$ donde B es un álgebra asociativa primitiva normada compleja con zócalo no nulo y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1/2$.

Esquema de la demostración. El zócalo $S(A)$ es un ideal simple que contiene un idempotente completamente primitivo. Por argumentos análogos a los de Osborn y Racine [8] se prueba que $S(A)$ posee una capacidad o bien contiene una subalgebra de capacidad n para cada entero positivo n. Cuando la capacidad es 1 entonces $S(A)$ es el algebra de los complejos, capacidad 2 implica que $S(A)$ es un álgebra como las descritas en (ii), mientras que si $S(A)$ posee dos idempotentes ortogonales no nulos cuya suma no es una unidad para $S(A)$ entonces un importante resultado de McCrimmon [7, Theorem 5] junto con técnicas de álgebras normadas prueba que $S(A)$ es conmutativa o un álgebra estrictamente casi-asocia tiva sobre los complejos. Finalmente, un lema del autor [2] permite deducir la estructura de A a partir de la de su zócalo.

NOTA. Como se dijo al principio, las álgebras B que aparecen en (iv) fueron estudiadas por Bonsall y Duncan. Por otro lado, es posible dar alguna información sobre las álgebras de Jordan del apartado (iii). En efecto, en [3] se prueba que un álgebra de Jordan primitiva normada compleja con zócalo no nulo es $\mathbb{C}$, el álgebra $J = \mathbb{C} \oplus V$ determinada por una forma bilineal simétrica no degenerada continua sobre un espacio vectorial normado complejo V, un álgebra de matrices de Jordan $\mathrm{Sim}(M_n(D),S)$ donde $n \geq 3$ y (D,j) es un álgebra de composición sobre los complejos de dimensión 1,2 y 4 si $n \geq 4$ y de dimensión 1,2,4 y 8 si $n = 3$, una subalgebra J de un algebra $L_W(V)^+$ asociada a un par dual (V,W) de espacios vectoriales complejos tal que J contiene todos los operadores de rango finito, o una subalgebra J del álgebra de Jordan $\mathrm{Sim}(L_V(V),*)$ conteniendo los operadores de rango finito y donde V es un espacio vectorial complejo que es auto-dual respecto de un producto escalar hermitiano o alternante.

REFERENCIAS

1. F.F BONSALL and J. DUNCAN, "Complete Normed Algebras". Springer Verlag (1973).
2. A. FERNANDEZ LOPEZ, "Ideals in nondegenerate noncommutative Jordan algebras". Commun. in Algebra (para aparecer).
3. A. FERNANDEZ LOPEZ, "Noncommutative Jordan algebras containing minimal inner ideals". Comunicación presentada al Coloquio de Algebras de Jordan (Montpellier 1-4 Septimebre 1985).
4. A. FERNANDEZ LOPEZ and A. RODRIGUEZ PALACIOS, "Primitive noncommutative Jordan algebras with nonzero socle". Proc. Amer. Math. Soc. (para aparecer).
5. N. JACOBSON, "Structure and Representations of Jordan Algebras". Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 39, Providence R.I. 1968.
6. L. HOGBEN and K. McCRIMMON, "Maximal modular inner ideals and the Jacobson radical of a Jordan algebra". J. Algebra 68 (1981), 155-169.
7. K. McCRIMMON, "Noncommutative Jordan rings". Trans. Amer. Math. Soc. 158 (1971), 1-33.
8. J.M. OSBORN and M.L. RACINE, "Jordan rings with nonzero socle". Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 375-387.
9. M. SLATER, "The socle of an alternative ring". J. Algebra 14 (1970), 443-463.

AMS clas. 17C10