UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

DISERTACIONES DEL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

5

PEDRO MORALES

NUEVOS RESULTADOS EN TEORÍA DE LA MEDIDA NO CONMUTATIVA

5

Nuevos resultados en teoria de la medida no conmutativa

by

Pedro Morales

Lecture given 20 April 1989

NUEVOS RESULTADOS EN TEORIA DE LA MEDIDA NO CONMUTATIVA

Pedro Morales

La extensión de la teoría clásica de la medida a la teoría de medidas sobre un conjunto ordenado ortomodular fue motivada principalmente por su aplicación a los fundamentos de la Mecánica Cuántica. No es extraño entonces que el primer artículo de esta nueva disciplina (llamada corrientemente teoría de la medida no commutativa) fuera escrito por J. von Neumann cuatro años después de la publicación de su obra monumental [23] (Ver también [2] y [22]).

El propósito de esta nota es de presentar algunos nuevos teoremas que extienden resultados clásicos de la Teoría de la Medida y que conservan la simplicidad y la brevedad del original.

Expondremos, en primer lugar, algunas nociones básicas sobre la teoría algebraica de los conjuntos ordenados ortomodulares, y cuyos detalles el lector los encontrará en las monografías recientes de Beran [3].

Sea C un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado. Denotaremos el supremo (respectivamente, el ínfimo) de C, si existe, por $\vee C$ (respectivamente, $\wedge C$). Otras notaciones utilizadas serán $\vee\{a,b\}=a\vee b$, $\wedge\{a,b\}=a\wedge b$, $\{a_i:i\in I\}=\vee_{i\in I}a_i$, $\wedge\{a_i:i\in I\}=\wedge_{i\in I}a_i$, $\vee\{a_i:i\in\{0,1,\ldots,n\}=\vee_{i=0}^{n}a_i$, donde $n\in w=\{0,1,2,\ldots\}$.

Consideremos el sistema $(L,\leq,',0,1)$ donde L es un conjunto, $\leq$ es una relación binaria sobre L, ' es una función de L en L y 0,1 son dos elementos distintos de L. Diremos que $L=(L,\leq,',0,1)$ es un **conjunto ordenado ortomodular si**

(i) $(L,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado;

(ii) 0 es el más pequeño elemento de L y 1 es el más grande elemento de L.

(iii) ' es una función idempotente y decreciente tal que $a \wedge a' = 0$ para todo $a \in L$;

(iv) si $a,b \in L$ y $a \leq b'$, entonces $a \vee b$ existe;

(v) si $a,b \in L$ y $a \leq b$, entonces $b = a \vee (a \vee b')'$.

Mencionemos los siguientes ejemplos de conjuntos ordenados ortomodulares:

1) Sea $(R,+,.,0,1)$ un anillo con unidad tal que $a.a=a$ para todo $a \in R$. Definamos $a' = 1+a$ y $a \leq b$ si y solamente si $a.b=a$. Entonces $(R,\leq,',0,1)$ es un conjunto ordenado ortomodular.

2) Sea $S = \{A \subseteq \omega : \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{card}(A \cap \{0,1,\ldots,n\})}{n+1} \text{ existe}\}$. Entonces $(S,\subseteq,^{c}, \phi,\omega)$ es un conjunto ordenado ortomodular, donde A^{c} designa el complemento de $A \in S$.

3) Sea H un espacio de Hilbert sobre un cuerpo de los números reales o complejos, y $\mathscr{L}(H)$ el conjunto de todos los subespacios cerrados de H. Entonces $(\mathscr{L}(H),\subseteq,_{\perp},\{0\},H)$ es un conjunto ordenado ortomodular, donde $M_{\perp}$ designa el complemento ortogonal de $M \in \mathscr{L}(H)$.

En lo sucesivo L designará un conjunto ordendo ortomodular.

Se verifica facilmente que $0'=1, 1'=0$ y $a \vee a'=1$ para todo $a \in L$. Además, de los axiomas (iii), (iv) y de la Ley de De Morgan se deduce que $(a \vee b')' = a' \wedge b$ para todo $a,b \in L$ tales que $a \leq b$. Se obtiene entonces del axioma (V) la **identidad ortomodular**. Si $a,b \in L$ y $a \leq b$, entonces $b = a \vee (a' \wedge b)$.

Consideremos la relación binaria sobre L: $a_{\perp}b$ si $a \leq b'$. Puesto que $a \leq b' \Leftrightarrow b \leq a'$, la relación binaria $_{\perp}$ es simétrica. Por consiguiente, si $a,b \in L$ y $a_{\perp}b$, se puede decir que a y b son **ortogonales**. Notemos que si $a \in L$, entonces $a_{\perp}a \Leftrightarrow a=0$.

Sean $a \in L$ y M un subconjunto no vacío de L. Si $a_{\perp}b$ para todo $b \in M$, se escribe $b_{\perp}M$. Se dice que M es **ortogonal** si M contiene un solo elemento o bien $b_{\perp}M \setminus \{b\}$ para todo $b \in M$. El axioma (iv) implica que si M es un conjunto ortogonal y finito, entonces $\vee M$ existe.

Decimos que L es **σ-ortocompleto** si el supremo de todo subconjunto ortogonal y enumerable de L existe

Consideremos un sistema (S, +, 0, $\mathcal{U}$) donde S es un conjunto, + es una operación binaria sobre S, 0 es un elemento de S y $\mathcal{U}$ es una uniformidad sobre S. Diremos que $S=(S,+,0,\mathcal{U})$ es un **semigrupo uniforme** si

(i) la operación binaria + es asociativa y commutativa;

(ii) $x+0=x$ para todo $x\in S$;

(iii) la función $(x,y)\to x+y$ de $(S,\mathcal{U})x(S,\mathcal{U})$ en $(S,\mathcal{U})$ es uniformemente continua.

Es bien conocido que la uniformidad $\mathcal{U}$ puede ser generada por un conjunto P de seudométricas contínuas p sobre S tales que $p(x+z,y+z)\leq p(x,y)$ para todo $x,y,z\in S$ (propiedad de semi-invariancia). Para $p\in P$ y x,y,z, z', y', z', en S tenemos la siguiente útil desigualdad:

(*) $$p(x+y+z,x'+y'+z')\geq p(x,0)-p(x',0)-p(y,y')-\\-2p(y',0)-p(z,0)-p(z',0).$$

Mencionemos los siguientes ejemplos de semigrupos uniformes:

1) Sean $(G,+,0,\tau)$ un grupo topológico commutativo y $\mathcal{U}_G$ la uniformidad (bilateral) sobre (G,τ). Entonces $\mathcal{U}_G=\{\{(x,y)\in GxG:\ x\text{-}y\in V\}:\ V$ es un entorno de 0 en $(G,\tau)\}$ y $(G,+,0,\mathcal{U}_G)$ es un semigrupo uniforme.

2) Sea $\mathcal{U}_\infty$ la uniformidad sobre $[0,+\infty]=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}\cup\{+\infty\}$ generada por la seudo-métrica continua y semi-invariante $p(x,y)=\left|\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right|$ sobre $[0,+\infty]$ (con la obvia convención $\frac{+\infty}{1+(+\infty)}=1$). Entonces $([0,+\infty],+,0,\mathcal{U}_\infty)$ es un semigrupo uniforme.

3) Sean $(G,+,0,\tau)$ un grupo topológico commutativo, $\mathcal{U}_G$ la uniformidad (bilateral) sobre (G,τ) y 2^G el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de G. Definamos $A+B=\{x+y:x\in A$ e $y\in B\}$ para todo $A,B\in 2^G$ y sea $\mathcal{U}$ la uniformidad sobre 2^G de base $\mathcal{B}=\{\{(A,B)\in 2^G x 2^G:A\subseteq U[B]$ y $B\subseteq U[A]\}:U\in\mathcal{U}_G\}$. Entonces $(2^G,+,\{0\},\mathcal{U})$ es un semigrupo uniforme.

En lo sucesivo S designará siempre un semigrupo uniforme separado.

Sea λ:L$\longrightarrow$S. Decimos que

a) λ es **aditiva** si $\lambda(0)=0$ y $\lambda(a\vee b)=\lambda(a)+\lambda(b)$ cuando $a,b\in L$ y $a\perp b$;

b) λ es **σ-aditiva** si $\lambda(0)=0$ y, para toda sucesión ortogonal $(a_i)_{i\in\omega}$ en L tal que $\vee_{i\in\omega}a_i$ existe, se tiene $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\lambda(a_i) = \lambda(\vee_{i\in\omega} a_i)$;

c) λ es **exhaustiva** si, para toda sucesión ortogonal $(a_i)_{i\in\omega}$ en L, se tiene $\lim_{n\to\infty}\lambda(a_i)=0$';

d) λ es **continua** en 0 si, para toda sucesión decreciente $(a_i)_{i\in\omega}$ en L tal que $\wedge_{i\in\omega} a_i=0$, se tiene $\lim_{n\to\infty}\lambda(a\ )=0$.

Designaremos por sa(L,S) el conjunto de todas las funciones aditivas y exhaustivas de L en S, y por ca(L,S) el conjunto de todas las funciones σ-aditivas de L en S.

Si $a\in L$ escribamos $[0,a]=\{b\in L: b\leq a\}$.

Sean $\lambda\in sa(L,S)$ y $p\in P$. Entonces la función λ:L $[0,+\infty]$ definida por la fórmula $\lambda_p(a)=\sup\{p[(\lambda(b), 0): b\in[0,a]\}$ recibe el nombre de **p-semivariación** de λ. Claramente $\lambda_p(0)=0$, $\lambda_p(.)\geq p(\lambda(.),0)$, λ_p es creciente y exhaustiva.

Lema 1. Supongamos que L sea σ-ortocompleto. Sean λ, $\mu\in sa(L,S)$ y $p\in P$. Entonces para todo $\varepsilon>0$, todo subconjunto infinito M de ω y toda sucesión ortogonal $(a_i)_{i\in\omega}$ en L, existe un subconjunto infinito N de M tal que $\lambda_p(\vee_{i\in N} a_i)<\varepsilon$ y $\mu_p(\vee_{i\in N} a_i)<\varepsilon$.

Demostración. Sea $(M_k)_{k\in\omega}$ una partición de M tal que cada M_k es infinito. Sea $b_k=\vee_{i\in M_k}a_i$ para todo $k\in w$. Es claro que $(b_k)_{k\in\omega}$ es una sucesión ortogonal en M. Pero λ_p y μ_p son exhaustivas. Por consiguiente, existe $k_0\in\omega$ tal que $\lambda_p(b_{k_0})<\varepsilon$ y $\mu_p(b_{k_0})<\varepsilon$. Entonces $N=M_{k_0}$ verifica las condiciones del Lema.

Sea K un subconjunto no vacío de sa(L,S). Decimos que:

a) K es **uniformemente exhaustivo** si, para toda sucesión ortogonal $(a_i)_{i\in\omega}$ en L, se tiene $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda(a)=0$ uniformemente en $\lambda\in K$.

b) K es **uniformemente continuo en 0** si, para toda sucesión decreciente $(a_i)_{i\in\omega}$ en L tal que $\wedge_{i\in\omega}a_i=0$, se tiene $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda(a_i)=0$ uniformemente en $\lambda\in K$.

Teorema 2. ([17]) (Teorema de Brooks-Jewett). Supongamos que L sea σ-ortocompleto. Si $(\lambda_i)_{i\in\omega}$ es una sucesión en sa(L,S) tal que $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i(a)=\lambda_0(a)$ para todo $a\in L$. Entonces el conjunto $\{\lambda_i\colon i\in w\}$ es uniformemente exhaustivo.

Demostración: Supongamos lo contrario. Entonces podemos suponer (pasando a una subsucesión si fuese necesario) que existe $p\in P$, $\varepsilon>0$ y una sucesión ortogonal $(a_i)_{i\in\omega}$ en L tal que $p(\lambda_i(a_i),\ 0)\geq\varepsilon$ para cada $i\in\omega$. Puesto que $\lambda_0\in sa(L,S)$, por el Lemma existe un subconjunto infinito N de ω tal que $(\lambda_0)_p(\vee_{i\in N}a_i)\leq\varepsilon/12$. Sea $N_0=N\setminus\{0\}$.Entonces $(\lambda_0)_p(\vee_{i\in N_0}a_i)\leq(\lambda_0)_p(\vee_{i\in N}a_i)<\ \varepsilon/12$.

Supongamos, por inducción, que dado $k\in\omega$ podemos elegir, para cada $j\in\{0,1,2,\dots,k\}$, $n_j\in\omega$ y un subnconjunto infinito N_j de ω con las siguientes propiedades:

(i) $n_0=0$

(ii) $N_j\subset N_{j-1}$, $n_j\in N_{j-1}$ y n_j es estrictamente más pequeño que el menor elemento de N_j (donde $N_{-1}=\omega$).

(iii) $(\lambda_{n_j})_p(\vee_{i\in N_j}\ a_i)<\varepsilon/12$

(iv) $\sum_{i=0}^{j-1} p(\lambda_{n_j}(a_{n_i}),\ \lambda_0(a_{n_i}))\leq\varepsilon/12\cdot$

Puesto que $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i(a_{n_j})=\lambda_0(a_{n_j})$ para cada $j\in\{0,1,2,\dots,k\}$, podemos elegir $m_j\in\omega$ tal que $i\in\omega$ y $i\geq m_j$ implica

$p(\lambda_i(a_{n_j}),\ \lambda_0(a_{n_j}))<\varepsilon/12(k+1)$. Pero N_k es un subconjunto infinito de ω. Entonces existe $n_{k+1}\in N_k$ tal que $n_{k+1}>\max\ \{m_j\colon j\in\{0,1,\dots,k\}\}$. Por tanto $\sum_{i=0}^{k} p(\lambda_{n_{k+1}}(a_{n_i}),\lambda_0(a_{n_i}))<\varepsilon/12\cdot$ Sea $M=N_k\setminus\{0,1,\dots,n_{k+1}\}$.

Por el Lema existe un subconjunto infinito N_{k+1} de M tal que $(\lambda_0)_p(\vee_{i\in N_{k+1}} a_i)<\varepsilon/12$ y $(\lambda_{n_{k+1}})_p(\vee_{i\in N_{k+1}} a_i)<\varepsilon/12$. Es fácil ver que n_{k+1} satisface las condiciones (ii), (iii), (iv). Luego el proceso inductivo está completado.

Notemos que la condición (ii) implica que $n_j\in N_j$ y $n_i\neq n_j$ si $i\neq j$ $(i,j\in\omega)$. Puesto que n_j es estrictamente más pequeño que el menor elemento de N_j, $n_j\notin N_j$. Para demostrar la segunda propiedad, supongamos que $i<j$. Entonces $i\leq j-1$ y por tanto $N_{j-1}\subset N_i$. Como $n_i\notin N_i$, se sigue que $n_i\notin N_{j-1}$. Luego $n_i\neq n_j$ ya que $n_j\in N_{j-1}$.

Denotemos $b_j=\vee_{i\in N_j} a_i$ para todo $j\in\omega$. Sea $j\in\omega\backslash\{0\}$. Dado que $N_j\subseteq N_{j-1}$ y $n_j\in N_{j-1}\backslash N_j$, se sigue que $b_j\leq b_{j-1}$ y $a_{n_j}\leq b_{j-1}$ y por tanto $a_{n_j}\leq b_0$. Pongamos $a=\vee_{i\in\omega\backslash\{0\}} a_{n_i}$, y , para cada $k\in\omega\backslash\{0\}$, definamos $c_k=\vee_{j=1}^{k-1} a_{n_j}$ y $d_k=a-\vee_{j=1}^{k} a_{n_j}$. Es fácil verificar que el conjunto $\{a_{n_k},c_k, d_k\}$ es ortogonal, $a=a_{n_k}\vee c_k\vee d_k$, $c_k\leq b_0$ y $d_k\leq b_k$. Aplicando la desigualdad (*), las condiciones (iii) y (iv) y la aditividad de λ_{n_k} y λ_0 obtenemos

$$p(\lambda_{n_k}(a),\lambda_0(a))\geq p(\lambda_{n_k}(a_{n_k}),0)-p(\lambda_0(a_{n_k}),0)-2p(\lambda_0(c_k),0)-$$
$$-p(\lambda_{n_k}(c_k),\lambda_0(c_k))-p(\lambda_{n_k}(d_k),0)-p(\lambda_0(d_k),0)\geq$$
$$\geq\varepsilon-(\lambda_0)_p(a_{n_k})-2(\lambda_0)_p(c_k)-\sum_{j=1}^{k-1} p(\lambda_{n_k}(a_{n_i}),\lambda_0(a_{n_i}))-$$
$$-(\lambda_{n_k})_p(d_k)-(\lambda_0)_p(d_k)\geq\varepsilon-3(\lambda_0)_p(b_0)-\sum_{j=0}^{k-1} p(\lambda_{n_k}(a_{n_i}),\lambda_0(a_{n_i}))-$$
$$-(\lambda_{n_k})_p(b_k)-(\lambda_0)_p(b_0)\geq\varepsilon-\varepsilon/4-\varepsilon/12-\varepsilon/12-\varepsilon/12=\varepsilon/2$$

para todo $k\in\omega\backslash\{0\}$, lo que es una contradicción puesto que el conjunto $\{n_k\colon k\in\omega\backslash\{0\}\}$ es infinito.

Corolario 3: ([17]) Supongamos que L sea σ-ortocompleto. Si $(\lambda_i)_{i\in\omega}$ es una sucesión en sa(L,S) tal que $\lim\limits_{i\to\infty}\lambda_i(a)=\lambda_0(a)$ para todo $a\in L$ y λ_i es continua en 0 para todo $i\in\omega\backslash\{0\}$, entonces λ_0 es continua en 0 y el conjunto $\{\lambda_i\colon i\in\omega\}$ es uniformemente continuo en 0.

Demostración: Es fácil de verificar que λ_0 es continua en 0. Por el teorema, el conjunto $\{\lambda_i\colon i\in\omega\}$ es uniformemente exhaustivo. Supongamos que este conjunto no es uniformemente continuo en 0.Entonces podemos suponer (pasando a una subsucesión si fuese necesario) que existe $p\in P$ y $\varepsilon>0$ y una sucesión decreciente $(a_i)_{i\in\omega}$ en L con $\wedge_{i\in\omega}a_i=0$ tal que $p(\lambda_i(a_i),\ 0)\geq\varepsilon$ para cada $i\in\omega$.

Elijamos $k_0=1$. Como λ_{k_0} es continuo en 0,existe $k_1\in\omega\backslash\{0\}$ tal que $p(\lambda_{k_0}(a_{k_1}),\ 0)<\varepsilon/2$. Como λ_{k_1} es continuo en 0, existe $k_2\in\omega\backslash\{0,1,\ldots,k_1\}$ tal que $p(\lambda_{k_1}(a_{k_2}),\ 0)<\varepsilon/2$. Continuando la inducción obtenemos una sucesión estrictamente creciente $(k_j)_{j\in\omega}$ en ω tal que $p(\lambda_{k_j}(a_{k_{j+1}}),\ 0)<\varepsilon/2$.

Como $a_{k_{j+1}}\leq a_{k_j}$, $a_{k_j}\text{-}a_{k_{j+1}}$ existe. Tomemos $b_j=a_{k_j}\text{-}a_{k_{j+1}}$ para cada $j\in\omega$. Probaremos que la sucesión $(b_j)_{j\in\omega}$ es ortogonal. Sea $i,j\in\omega$ tal que $i\neq j$. Podemos suponer que $i>j$. Entonces $i\geq j+1$ y por tanto que $a_{k_i}\leq a_{k_{j+1}}$. De aquí que

$$b_i=a_{k_i}\wedge a_{k_{i+1}}\leq a_{k_i}\leq a_{k_{j+1}}\leq a'_{k_j}\vee a_{k_{j+1}}=b'_j.$$

Por la identidad ortomodular se sigue que $a_{k_j}=b_j\vee a_{k_{j+1}}$ y además $\lambda_{k_j}(a_{k_j})=\lambda_{k_j}(b_j)+\lambda_{k_j}(a_{k_{j+1}})$. Por tanto, $p(\lambda_{k_j}(a_{k_j}),\ 0)\text{-}p(\lambda_{k_j}(a_{k_{j+1}}),\ 0)\leq\varepsilon/2=\varepsilon/2$ para todo $j\in\omega$, lo que es una contradicción por ser el conjunto $\{k_j\colon j\in\omega\}$ infinito.

Un subconjunto no vacío K de ca(L,S) se dice **uniformemente σ-aditivo** si, para toda sucesión ortogonal $(a_i)_{i\in\omega}$ en L tal que $\vee_{i\in\omega}\ a_i$ existe, se tiene $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\lambda(a_i)=\lambda(\vee_{i\in\omega}\ a_i)$ uniformemente en $\lambda\in K$.

Teorema 4. ([7])(Teorema de convergencia de Nikodym). Supongamos que L sea σ-ortocompleto. Si $(\lambda_i)_{i\in\omega}$ es una sucesión en sa(L,S) tal que $\lim_{i\to\infty}\lambda_i(a)=\lambda_0(a)$ para todo $a\in L$ y $\lambda_i\in ca(L,S)$ para todo $i\in\omega\backslash\{0\}$, entonces $\lambda_0\in ca(L,S)$ y el conjunto $\{\lambda_i : i\in\omega\}$ es uniformemente σ-aditivo.

Demostración. Ver [7].

Lema 5. Supongamos que L sea σ-ortocompleto. Sean G un grupo topológico commutativo y separado, λ_0 una función de L en G y $(\lambda_i)_{i\in\omega\backslash\{0\}}$ una sucesión en sa(L,G). Si $\lim_{i\to\infty}\lambda_i(a)=\lambda_0(a)$ para todo $a\in L$, entonces $\lambda_0\in sa(L,G)$.

Demostración. Basta reemplazar en la demostración de [7, Corolario 2.2] sucesión disjunta por sucesión ortogonal.

Observación 5. En el caso que S sea un grupo topológico commutativo y separado, el Lema 5 implica que la condición $\lambda_0\in sa(L,S)$ en el Teorema 2, Corolario 3 y Teorema 4 es superflua.

Sea M un subconjunto no vacío de L y $N\subseteq M$. Decimos que:

a) M es **normal** si $[0,a]\subseteq M$ para todo $a\in M$;

b) N es **ortomayorado** en M si $N=\phi$ o bien todo subconjunto ortogonal de N es acotado superiormente en M.

Sean $a\in L$ y M un subconjunto no vacío de L. Escribamos $M_a=L\backslash\{b\in L: a\wedge b \text{ existe y } a\wedge b\in L\backslash M\}$, $M^*=\{b\in L: M_b=L\}$ y $M'=\{b': b\in M\}$. Notemos que $M^*\neq\phi$ si $0\in M$.

Teorema 6. ([14])(Teorema de descomposición de Lebesgue). Sean M y N dos subconjuntos no vacíos de L tales que M es normal y de N. Si M\N es ortomayorado en M, entonces existe un elemento $a\in M$ tal que $M\subseteq N_a$, y $M^*\cap(N^*)'\neq\phi$.

Demostración. Ver [14].

Observaciones 7. (a) En la literatura se encuentra también un teorema de descomposición de Hahn-Jordan para medidas de Gleason [11] y un teorema de descomposición aproximadad de Jordan-Hahn para elementos pertenecientes a sa(L,ℝ) [19].

(b) El Teorema 2 extiende resultados que se encuentran en [1], [4], [8], [10], [15] y [16].

(c) El Teorema 4 extiende resultados que se encuentran en [1], [6], [11], [15] y [18].

(d) El Teorema 6 permite la unificación de varios resultados de descomposición que se encuentran en [5], [7], [13], [20] y [21].

Agradecimientos. La presente nota es el contenido de una conferencia pronunciada por el autor en la UNED, por invitación del Catedrático Dr. Pedro Jiménez Guerra. Me es sumamente grato testimoniar mi agradecimiento al Departamento de Matemáticas Fundamentales por su hospitalidad y magníficas condiciones ofrecidas para un trabajo científico.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANTOSIK,P, y SWARTZ,C.: "Matrix Methods in Analysis". Lect. Notes Math. 113, Springer-Verlag. Berlin. 1985.

[2] BELTRAMETTI, E.G. y CASSINELLI, G.: "The Logic of Quantum Mechanics". Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1981.

[3] BERAN, L.: "Orthomodular Lattices Algebraic Approach". Academia, Praha, 1984.

[4] BROOKS, J. y JEWETT, T.:"On Finetely Additive Vector Measures". Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 67(1970), 1294-1298.

[5] CAPEK, P.: "Decomposition Theorems in Measure Theory". Math. Slovaca 31 (1981), 53-69.

[6] COOK, T.A.: "The Nikodym-Hahn-Vitali-Saks Theorem for States in a Quantum Logic", Proc. Conf. on Mathematical Foundations of Quantum Theory, Loyola University, New Orleans, LA, Academic Press, New York (1978), 275-286.

[7] D'ANDREA, A.B., DE LUCIA, P. y MORALES, P.: "The Lebesgue Decomposition Theorem and the Nikodym Convergence Theorem on an Orthomodular Poset". Atti Sem. Mat. Fis., Univ. Modena (1989). (Aparecerá).

[8] DARST, R.B.: "The Vitali-Hahn-Saks and Nikodym Theorems for Additive Set Functions II". Bull. Amer. Math. Soc. 79(1973), 758-760.

[9] DE LUCIA, P. y MORALES,P.: "Some Consequences of the Brooks-Jewett Theorem for Additive Uniform Semigroup-Valued Functions". Seminario Matematico di Bari (1989). (Aparecerá).

[10] DREWNOWSKI, L.: "Equivalence of Brooks-Jewett, Vitali-Hahn-Saks and Nikodym Theorems".Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 20(1972), 725-731.

[11] DVURECENSKIJ, A.: "On Convergences of Signed States". Math. Slovaca 28(1978), 289-295.

[12] DVURECENSKIJ, A.: "Hahn-Jordan Decomposition for Gleason Measures". Int. J. Theor. Phys. 26(1989), 513-522.

[13] FICKER, V.: "An abstract formulation of the Lebesgue Decomposition Theorem".J. Austral. Math. Soc. 12(1971), 101-105..

[14] HADJOU, B.: "Un Théorme de Décomposition de Lebesgue sur L'ensemble des Parties d'un Ensemble Ordonné Orthomodulaire" Ann. Sc. Math. Quebec. (Aparecerá).

[15] LABUDA, I.: "Sur Quelques Généralisations des Théormes de Nikodym et de Vitali-Hahn-Saks". Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math. Astron. Phys. 20(1972),447-456.

[16] LANDERS, D y ROGGE, L.: "The Hahn-Vitali-Saks and the Uniform Boundedness Theorem in Topological Groups".Manuscripta Math. 4(1971), 351-359.

[17] MORALES, P.: "A Non-commutative Version of the Brooks-Jewett Theorem". Proc. Winter School on Measure Theory, Liptovski Jan, Slovak Academy of Sciences, Bratislava (1988).

[18] NIKODYM, O.: "Sur les suites convergentes de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait". Monatsh. Math. Phys. 40(1933), 427-433.

[19] RUTTIMANN, G.: "The Approximate Jordan-Hahn Decomposition". Preprint 1987.

[20] RUTTIMANN, G. y SCHINDLER, C.: "The Lebesgue Decomposition of Measures on Orthomodular Posets".Quart. J. Math. Oxford 37(1986), 321-345.

[21] TARANTINO, C.: "Decomposition Theorems for Finitely Additive Functions". Ricerche Mat. (1988). (Aparecerá).

[22] VARADARAJAN, V.S.: "Geometry of Quantum Theory", Scond Edition, Springer-Verlag, Berlín, 1985.

[23] VON NEUMANN, J.: "Mathematisches Grundlagen der Quantenmechanik" Julius Springer, Berlín, 1932.

Département de Mathématiques et d'Informatique
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec
CANADA, J1K 2R1

These notes collect some of the talks given in the Seminario del Departamento de Matemáticas Fundamentales de la U.N.E.D. in Madrid. Up to now the following titles have appeared:

1 **Luigi Grasselli,** Crystallizations and other manifold representations.
2 **Ricardo Piergallini,** Manifolds as branched covers of spheres.
3 **Gareth Jones,** Enumerating regular maps and hypermaps.
4 **J.C.Ferrando, M.López-Pellicer,** Barrelled spaces of class N and of class χ_0
5 **Pedro Morales,** Nuevos resultados en Teoria de la medida no conmutativa.
6 **Tomasz Natkaniec,** Algebraic structures generated by some families of real functions.
7 **Gonzalo Riera,** Algebras of Riemann matrices and the problem of units.
8 **Lynne D. James,** Representations of Maps.
9 **Grzegorz Gromadzki,** On supersoluble groups acting on Klein surfaces.
10 **Maria Teresa Lozano,** Flujos en 3-variedades.